DAS VERHALTEN GLOBALER LÖSUNGEN NICHTLINEARER WELLENGLEICHUNGEN FÜR GROSSE ZEITEN

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Hartmut Pecher
aus Herford

Göttingen 1974

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534926_0012

Druck: ANDREAS FUNKE, Offsetdruck
34 Göttingen · Wendenstraße 5b

Das Verhalten globaler Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen für groβe Zeiten

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg - August - Universität
zu Göttingen

vorgelegt von
Hartmut Pecher
aus Herford

Göttingen 1974

D 7

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Prof. Dr. W. von Wahl
Korreferent: Prof. Dr. E. Heinz

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Febr. 1974

Inhalt

§ 0 Einleitung S. 1
§ 1 Bezeichnungen S. 6
§ 2 Die Beschränktheit der Lösung S. 7
§ 3 Der Abfall gegen Null für große Zeiten S. 27
§ 4 Die asymptotische Abfallgeschwindigkeit der Lösung S. 45
§ 5 Das Verhalten der $H^{m,p}$-Normen der Lösung S. 56
§ 6 Bemerkungen über die Anfangswerte S. 70
Literatur S. 74

§ 0 Einleitung

Das Cauchy-Problem und das Verhalten der Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + m^2 u + G'(u) = 0 \qquad (0.1)$$

war in den letzten Jahren schon Ziel ausgedehnter Untersuchungen.

So betrachtete Browder in [1] den allgemeineren Fall der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + Au + F^{(1)}(|u|^2)u = 0$$

im $\mathbb{R}^n$, wobei A ein selbstadjungierter elliptischer Differentialoperator der Ordnung 2m im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist und $F^{(1)}$ die Ableitung einer Funktion F, der gewisse Wachstums- und Positivitätsbeschränkungen auferlegt werden. Browder zeigte die globale Lösbarkeit des Cauchy-Problems im Raum der Funktionen, die Distributionsableitungen in $L^2(\mathbb{R}^n)$ bis zur Ordnung 2m besitzen.

Die Existenz globaler klassischer Lösungen wurde zuerst von Jörgens [8] für das Cauchy-Problem der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + F^{(1)}(|u|^2)u = 0$$

im $\mathbb{R}^3$ gezeigt. Wieder sind dabei Wachstums- und Positivitätsbedingungen an F nötig. Ein zulässiger Fall ist die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u^3 = 0 \ .$$

Für diesen Spezialfall wurde später von Segal [12] und Sather [11] mit Hilbertraummethoden ein ähnliches Ergebnis erzielt.

Eine Verallgemeinerung auf höhere Raumdimensionen ge-

lang von Wahl in [15] , wo ebenfalls mit abstrakten Hilbertraummethoden die klassische Lösbarkeit des Cauchy-Problems für alle $t \geqslant 0$ von

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A(t)u + F^{(1)}(|u|^2)u + \gamma u = 0$$

im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, $n \leqslant 6$, gezeigt werden konnte. Dabei ist $A(t)$, $t \geqslant 0$, eine Schar selbstadjungierter, strikt positiv definiter elliptischer Differentialoperatoren der Ordnung $2m$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$, γ eine beliebige komplexe Konstante und $F^{(1)}$ wiederum die Ableitung einer nichtnegativen Funktion, deren Wachstum beschränkt werden muß.

Ausgehend von diesen Existenz- und Regularitätssätzen beschäftigten sich dann verschiedene Autoren mit dem Verhalten der Lösungen von Klassen bisher schon angesprochener nichtlinearer sowie linearer Gleichungen. Die Arbeit von Strauss [14] behandelt den Fall

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = F(u)$$

in drei Raumdimensionen und zeigt u.a., daß für genügend glatte Anfangswerte und Nichtlinearitäten $F(u) = |u|^{\rho-1}u$ mit $3 \leqslant \rho < 5$ die Lösung $u(x,t)$ gleichmäßig wie $t^{\varepsilon-1}$ für $t \to \infty$ abfällt mit einem beliebigen positiven ε. Verbessert wurden diese Abschätzungen dann durch von Wahl in [18] , der eine Abfallgeschwindigkeit von t^{-1} für $\rho > 3$ und $t^{-1}\log t$ für $\rho = 3$ erreichte. Entsprechende Resultate für den Fall von Gleichungen des Typs

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u + gF(u) = 0 \ , \ u = u(x_1, \ldots, x_n, t) \ ,$$

wurden von Segal [13] erzielt. Hier ist $n \leqslant 3$, $m \neq 0$, und von F wird außer der Eigenschaft, klassische Lösungen der betrachteten Gleichung zu garantieren, auch

noch ein Verschwinden von gewisser Ordnung im Nullpunkt vorausgesetzt. Unter einer Kleinheitsbedingung an die Anfangswerte oder an die Kopplungskonstante g wird so u.a. in drei Raumdimensionen für den Fall $F(u)=|u|^{\varrho-1}u$ gezeigt, daß für $5>\varrho\geqslant 3$ die Lösungen wie $t^{-\frac{1}{2}}$, d.h. wie die Lösungen der zugehörigen linearen Gleichung abfallen. Für $\varrho > \frac{8}{3}$ konnte Segal immerhin noch einen Abfall wie $t^{-\varepsilon}$ mit einem hinreichend kleinen $\varepsilon>0$ nachweisen. Weitere Resultate in dieser Richtung wurden durch von Wahl in [16] erzielt, der das Cauchy-Problem und den asymptotischen Abfall von Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + mu = F(u, \frac{\partial}{\partial t} u, D_1 u, \ldots, D_n u) \ , \ m \geqslant 0 \ ,$$

im $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, untersuchte. Dabei soll F eine auf $\mathbb{C}^{n+2}$ analytische Funktion sein, die für $n = 3$ im Nullpunkt von der Ordnung 4 und für $n \geqslant 4$ mindestens von der Ordnung 3 verschwindet. Dann existiert genau eine klassische Lösung, die wie $t^{-\frac{n-1}{2}}$ für große Zeiten abfällt, falls die glatten Anfangswerte einer gewissen Kleinheitsbedingung genügen.

Es gibt dann noch eine ausführliche Arbeit von Chadam [2], [3], der ebenfalls Gleichungen des letztgenannten Typs betrachtet und ähnliche Ergebnisse erzielt. Schließlich behandelten Morawetz und Strauß in [10] für drei Raumdimensionen den Fall

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u + u^3 = 0$$

mit $m \neq 0$. Ihr Hauptergebnis besteht darin, daß für glatte Anfangswerte gezeigt wird, daß die klassische Lösung mit $t^{-\frac{1}{2}}$ wie die Lösung der linearen Gleichung abfällt. Das Verfahren beruht auf einer Abschätzung des Kerns der zugehörigen Integralgleichung, wie sie aus den klassischen Darstellungsformeln von Hadamard [6]

oder Courant-Hilbert [5] folgt. Ferner wird schon in dieser Arbeit ohne Beweis bemerkt, daß ein gleichmäßiger Abfall der Lösungen für $t \to \infty$ auch für Nichtlinearitäten richtig sei, die im Nullpunkt von geringerer Ordnung als drei verschwinden.
Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit besteht nun in dem Nachweis, daß für Gleichungen der Form (0.1) mit $G'(u) = |u|^{\rho-1}u$ mit $5 > \rho > \frac{8}{3}$ die nach Jörgens [8] existierende globale klassische Lösung wie die Lösung der linearen Gleichung der Abschätzung

$$|u(x,t)| \leq \frac{c}{(1+t)^{3/2}}$$

gleichmäßig für alle $x \in \mathbb{R}^3$ genügt (Theorem 6). Das Wesentliche daran ist, daß außer der Glattheit keinerlei quantitative Einschränkungen der Anfangswerte nötig sind, so daß die Arbeit von Segal [13] in dieser Weise verallgemeinert werden kann. Ausgangspunkt der Untersuchungen sind wiederum die klassischen Darstellungsformeln für die Lösungen von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = f ,$$

wie sie in [6] oder [5] zu finden sind. Der erste Schritt besteht darin, die gleichmäßige Beschränktheit der Lösungen zu zeigen. Dabei braucht nur $\rho > \frac{5}{3}$ im Falle $m \neq 0$ und $\rho > 2$ im Falle $m = 0$ gefordert zu werden (Theorem 1 und Theorem 3). Darüberhinaus kann eine quantitative Abschätzung der $L^\infty(\mathbb{R}^3)$-Norm auch für alle anderen Fälle gegeben werden (Theorema 2 und 4). Ausgehend von diesen Resultaten wird dann zunächst für den Fall $m \neq 0$ und $\rho > \frac{8}{3}$ gezeigt, daß die Lösungen mit $t \to \infty$ gleichmäßig in x gegen Null abfallen (Theorem 5). Wesentliche Bestandteile des Beweises sind Abschätzungen von Morawetz [9] , bekannte Energieabschätzungen

sowie neue Abschätzungen des Kerns der Integralgleichung. Aus diesem Ergebnis wird dann in §4 unser Haupttheorem durch Anwendung eines geeigneten Iterationsverfahrens gewonnen. Schließlich wird in §5 unter Benutzung von Ergebnissen von Wahls [17] für den zeitlichen Abfall der L^p-Normen linearer Wellengleichungen noch das Verhaltem sämtlicher $H^{m,p}(\mathbb{R}^3)$-Normen für $p \geq 2$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ untersucht (Theorem 7 mit Bemerkung). Von den Anfangswerten wird zunächst verlangt, daß sie kompakten Träger besitzen, aber dann auch gezeigt, daß man sich für die Theoreme 1-5 von dieser Voraussetzung befreien kann und lediglich gewisse Regularitätsvoraussetzungen benötigt (§6). Es sei schließlich noch bemerkt, daß Wachstumsbeschränkungen der Nichtlinearität für $u \to \infty$ nur nötig sind, um die klassische Lösbarkeit des Cauchy-Problems und die Beschränktheit der Lösung zu garantieren.

§ 1 Bezeichnungen

Im folgenden sei $\mathbb{R}^+ := \{ t \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0 \}$, das Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ wird mit $(\cdot,\cdot)$, gelegentlich mit $\cdot$ bezeichnet. Für Funktionen $f: G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$, sei Tr f der Abschluß der Menge aller Punkte $x \in G$ mit $f(x) \neq 0$. $C^n(G)$ ist die Menge aller n-mal stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen. Entsprechend ist $C_0^n(G)$ die Menge aller Funktionen, deren Träger außerdem kompakt in G liegt. $L^2 = L^2(\mathbb{R}^3)$ bezeichnet den Hilbertraum der quadratintegrablen, meßbaren Funktionen $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. $L^p = L^p(\mathbb{R}^3)$ sei entsprechend der Banachraum der zur p-ten Potenz absolut integrablen, meßbaren Funktionen $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der üblichen Modifikation für $p = \infty$ und Norm $\|u\|_{L^p} = \|u\|_p$. $H^{k,p}(\mathbb{R}^3)$ ist der Banachraum der Funktionen u aus $L^p(\mathbb{R}^3)$, die Distributionsableitungen bis zur Ordnung k in $L^p(\mathbb{R}^3)$ besitzen mit der Norm

$$\|u\|_{H^{k,p}(\mathbb{R}^3)} := \Big\{ \sum_{0 \leq |\kappa| \leq k} \|D^\kappa u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} \Big\}^{\frac{1}{p}} , \quad 1 \leqslant p < \infty ,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n , \quad |\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j ,$$

$$D^\alpha := \prod_{j=1}^{n} D^{\alpha_j} \quad \text{und Modifikation für } p = \infty .$$

$H^{k,2}(\mathbb{R}^3) = H^k(\mathbb{R}^3) = H^k$ ist schließlich der Hilbertraum der Funktionen u aus $L^2(\mathbb{R}^3)$, die Distributionsableitungen bis zur Ordnung k in $L^2(\mathbb{R}^3)$ besitzen mit Skalarprodukt $(u,v)_{H^k} := \sum_{|\kappa| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$.
Wird eine beliebige Distributionsableitung n-ter Ordnung von u untersucht, so schreiben wir auch $D^n u$.

§ 2 Die Beschränktheit der Lösung

Im folgenden wird die nichtlineare Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + m^2 u + G'(u) = 0$$

betrachtet, wobei $G(u)$ eine Funktion aus $C^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist, die folgenden Bedingungen genüge:

(I) $G(u) \geqslant 0$ für $u \in \mathbb{R}$

(II) $G(0) = 0$

(III) $|G'(u)| \leqslant c\,|u|^{\rho'}$ für $|u| \geqslant 1$, $\rho' < 5$.

(IV) $G'(u) = F'(|u|^2)u$, $|F'(s)| \leqslant a[A + F(s)]^{\alpha}$
mit $a, A > 0$, $\alpha < \frac{2}{3}$, $s \in \mathbb{R}^+$.

Nach [8], Satz 2, S.298 besitzt unter diesen Voraussetzungen obige Gleichung zu Anfangswerten

$$\varphi \in C_0^3(\mathbb{R}^3), \quad \psi \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$$

genau eine klassische Lösung

$u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

$u(x,0) = \varphi(x)$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$.

Bemerkung: Falls $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ gilt, so gibt es genau eine Lösung $u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, wie aus [8], Seite 296-302 durch eine analoge Betrachtung folgt. Für die lineare Gleichung findet man dies z.B. bei [7], Seite 140/141.

Lemma 1:

Sei

$$E := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left[u_t^2 + |\nabla u|^2 + m^2 u^2 + 2G(u) \right] dx .$$

Dann gilt:

(a) $E = E(t) = \text{const.}$

(b) $\int_K [m^2u^2 + G(u)]\, d\tilde{S} \leqslant c_1 E$,

wobei K ein charakteristischer Kegel

$K := K_{x,t} := \{(y,\tau) \in \mathbb{R}^4 \mid |y-x| = t-\tau\,,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$

sei und $d\tilde{S}$ das Oberflächenmaß von K.

Beweis:

(a) ist wohlbekannt.

(b) Ein Beweis findet sich bei [8] , Seite 299.

Als nächstes soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen an die Nichtlinearität G'(u) die Lösung des Anfangswertproblems gleichmäßig beschränkt bleibt, und zwar wird zunächst der Fall $m \neq 0$ betrachtet.
Dazu verwenden wir die zur betrachteten Differentialgleichung zugehörige Integralgleichung, die nach [5] , Seite 448, folgende Gestalt hat:

$$u(x,t) = u_0(x,t) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} R(x-y,t-\tau)\, G'(u(y,\tau))\, dy\, d\tau\,,$$

wobei

$$R(x,t) := \frac{1}{4\pi}\,\frac{\delta(|x|-t)}{t} - \frac{1}{4\pi}\, Dm J_1(m(t^2-|x|^2)^{\frac{1}{2}})(t^2-|x|^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Hier ist J_1 die 1.Besselfunktion,

$$D := D(x,t) := \begin{cases} 1 & |x| < t \\ 0 & |x| > t \end{cases}\,,$$

u_0 die Lösung der homogenen Differentialgleichung zu den vorgegebenen Anfangswerten.
Wir benötigen folgende Beziehungen über Besselfunktionen:

$$J_1(m(t^2-|x|^2)^{\frac{1}{2}}) = \frac{m(t^2-|x|^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-m^2(t^2-|x|^2))^k}{k!\; 2^k \Gamma(k+2)}$$

$$|J_1(x)| \leq \frac{c_2}{(1+x)^{1/2}} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} .$$

Zum Beweis vergleiche man z.B. [4] , Seite 455.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\mu^2 := (t-\tau)^2 - |x-y|^2$$
$$\xi := t-\tau+|x-y|$$
$$\eta := t-\tau-|x-y|$$
$$\sigma := |x-y|$$
$$\sigma\omega := y-x$$
$$k(\mu) := \frac{m}{4\pi} \left| \frac{J_1(m\mu)}{\mu} \right|$$

Für $\eta > 0$ und $\tilde{\xi}, \tilde{\tilde{\xi}} > 0$, $1 < p < \infty$ definieren wir weiter:

$$l_p(\eta;\tilde{\xi},\tilde{\tilde{\xi}}) := \begin{cases} \eta^{\frac{1}{p}+\tilde{\xi}} & \text{für } \eta \geq \frac{1}{2} \\ \eta^{\frac{1}{p}-\tilde{\tilde{\xi}}} & \text{für } \eta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Es gilt nun folgendes vorbereitende

Lemma 2:

Es sei $1 \leq T \leq t$, $q > 6$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dann gilt:

$$\left(\int_0^{t-T} \int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)^q \, l_p(\eta;\tilde{\xi},\tilde{\tilde{\xi}})^q \, dy \, d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \leq c_3 \, T^{\frac{3}{q}-\frac{1}{2}+\tilde{\xi}} .$$

Beweis:

Wegen obiger asymptotischer Eigenschaft der Besselfunktionen gilt:

$$k(\mu) \leq \frac{c_4}{(1+\mu)^{1/2}}$$

und damit wird:

$$\left(\int_0^{t-T} \int_{|x-y|<t-\tau} l_p(\eta;\tilde{\xi},\tilde{\tilde{\xi}})^q \, k(\mu)^q \, dy \, d\tau \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \Big(\int_0^{t-T} \int_{\substack{|x-y|<t-\tau \\ \eta<\frac{1}{2}}} \eta^{q-1-q\tilde{\varepsilon}} k(\mu)^q \, dy \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\int_0^{t-T} \int_{\substack{|x-y|<t-\tau \\ \eta\geq\frac{1}{2}}} \eta^{q-1+q\tilde{\varepsilon}} k(\mu)^q dy d\tau \Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq c_5 \Big\{ \Big(\int_0^{t-T} \int_{|x-y|<t-\tau} \frac{((t-\tau)-|x-y|)^{q-1-q\tilde{\varepsilon}}}{((t-\tau)+|x-y|)^{\frac{3}{4}q} \, ((t-\tau)-|x-y|)^{\frac{3}{4}q}} \, dy \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \Big(\int_0^{t-T} \int_{|x-y|<t-\tau} \frac{((t-\tau)-|x-y|)^{q-1+q\tilde{\varepsilon}}}{((t-\tau)+|x-y|)^{\frac{3}{4}q} \, ((t-\tau)-|x-y|)^{\frac{3}{4}q}} \, dy \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\}$$

$$\leq c_6 \Big\{ \Big(\int_0^{t-T} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{4}q}} \Big(\int_0^{t-\tau} \frac{1}{((t-\tau)-\zeta)^{1-\frac{q}{4}+q\tilde{\varepsilon}}} \, \zeta^2 \, d\zeta \Big) \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \Big(\int_0^{t-T} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{4}q}} \Big(\int_0^{t-\tau} \frac{1}{((t-\tau)-\zeta)^{1-\frac{3}{4}-q\tilde{\varepsilon}}} \, \zeta^2 \, d\zeta \Big) \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\}$$

$$\leq c_7 \Big\{ \Big(\int_0^{t-T} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{4}q}} \, (t-\tau)^{3-1+\frac{q}{4}-q\tilde{\varepsilon}} d\tau \Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \Big(\int_0^{t-T} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{4}q}} \, (t-\tau)^{3-1+\frac{q}{4}+q\tilde{\varepsilon}} d\tau \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\}$$

$$\leq c_8 \Big\{ \Big(\int_0^{t-T} (t-\tau)^{2-\frac{q}{2}-q\tilde{\varepsilon}} \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\int_0^{t-T} (t-\tau)^{2-\frac{q}{2}+q\tilde{\varepsilon}} \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\}$$

$$\leq c_9 \; T^{\frac{3}{q}-\frac{1}{2}+\tilde{\varepsilon}} \qquad \text{für } q > 6 \qquad \underline{(1.1)}$$

Im Anschluß hieran läßt sich das erste Hauptresultat beweisen.

Theorem 1:
Es seien die Voraussetzungen (I) - (IV) erfüllt.
Sei ferner

(V) $|G'(u)| \leqslant c_{11} |u|^{\rho}$ für $|u| \leqslant 1$ mit $\rho > \frac{5}{3}$

(VI) $|u|^{\rho+1} \leqslant c_{12} G(u)$ für $|u| \geqslant 1$.

Dann ist $|u(x,t)|$ für $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ gleichmäßig beschränkt.

Beweis:
Es gilt für u(x,t) folgende Integralgleichung:

$$u(x,t) = u_0(x,t)$$

$$+ \frac{m}{4\pi} \int_0^t \int_{|x-y|<t-\tau} \frac{J_1(m((t-\tau)^2-|x-y|^2)^{1/2})}{[(t-\tau)^2-|x-y|^2]^{1/2}} G'(u)\, dy\, d\tau$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{G'(u(y,\tau))}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

Nach [10], Lemma 5, Seite 6 ist nun $|u_0(x,t)|$ beschränkt.
Bezeichnen wir weiter für $0 \leqslant a < b \leqslant t$:

$$I_c(a,b) := \frac{m}{4\pi} \int_a^b \int_{|x-y|<t-\tau} \frac{J_1(m((t-\tau)^2-|x-y|^2)^{1/2})}{[(t-\tau)^2-|x-y|^2]^{1/2}} G'(u)\, dy\, d\tau$$

und

$$I_s(a,b) := - \frac{1}{4\pi} \int_a^b \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{G'(u(y,\tau))}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

.

sowie

$$I(a,b) := I_c(a,b) + I_s(a,b) ,$$

so gilt:

$$|I_c(0,t)| \leqslant \left| \int_0^t \iint_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\, G'(u)\, dy\, d\tau \right| .$$

Wegen

$$k(\mu) \leqslant \frac{c_{13}}{(1+\mu)^{3/2}} \qquad \text{und} \qquad \mu \geqslant \eta \qquad \text{gilt:}$$

$$k(\mu) \leqslant \frac{c_{13}}{(1+\eta)^{3/2}}$$

und folglich:

$$|I_c(0,t)| \leqslant c_{14}\left\{ \left| \int_0^t \iint_{\substack{|x-y|<t-\tau \\ |u|\geqslant 1}} k(\mu)\, G'(u)\, dy\, d\tau \right| + \left| \int_0^t \iint_{\substack{|x-y|<t-\tau \\ |u|<1}} k(\mu) G'(u) dy d\tau \right| \right\}$$

Es ist

$$\left| \int_0^t \iint_{\substack{|x-y|<t-\tau \\ |u|\geqslant 1}} k(\mu)\, G'(u)\, dy\, d\tau \right| \leqslant c_{15} \left| \int_0^t \iint_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\, G(u)\, dy\, d\tau \right|$$

$$\leqslant c_{16} \int_0^t \left[\int G(u)\, \sigma^2\, d\omega\, d\xi \right] (1+\eta)^{-\frac{3}{2}}\, d\eta .$$

Das Integral in eckigen Klammern erstreckt sich über die Oberfläche eines charakteristischen Kegels $\eta = \text{const}$ und ist nach Lemma 1b) beschränkt durch $c_1 E$.
Also ist

$$\left| \int_0^t \iint_{\substack{|x-y|<t-\tau \\ |u|\geqslant 1}} k(\mu)\, G'(u)\, dy\, d\tau \right| \leqslant c_{17} E . \qquad (1.2)$$

Weiterhin kann der zweite Summand von $I_c(0,t)$ so abgeschätzt werden:

$$\left| \int_0^t \iint_{\substack{|u|\le 1 \\ |x-y|<t-\tau}} k(\mu)\, G'(u)\, dy\, d\tau \right|$$

$$\le \left| \int_0^{t-1} \iint_{\substack{|u|\le 1 \\ |x-y|<t-\tau}} k(\mu)\, G'(u)\, dy\, d\tau \right| + \left| \int_{t-1}^{t} \iint_{\substack{|u|\le 1 \\ |x-y|<t-\tau}} k(\mu)\, G'(u)\, dy\, d\tau \right|.$$

Für $\varrho \geq 2$ ist einfach diese Abschätzung richtig:

$$\left| \int_0^t \iint_{\substack{|u|\le 1 \\ |x-y|<t-\tau}} k(\mu)\, G'(u)\, dy\, d\tau \right|$$

$$\le c_{18} \int_0^t \left[\int u^2 \sigma^{-2}\, d\omega\, d\xi \right] (1+\eta)^{-\frac{1}{2}}\, d\eta$$

$$\le c_{19}\, E \qquad \text{nach Lemma 1b).}$$

Für $\frac{5}{3} < \varrho < 2$ wird folgendermaßen abgeschätzt:

$$\left| \int_0^{t-1} \iint_{\substack{|u|\le 1 \\ |x-y|<t-\tau}} k(\mu)\, G'(u)\, dy\, d\tau \right|$$

$$\le c_{20} \int_0^{t-1} \iint_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\, |u|^{\varrho}\, dy\, d\tau \qquad (1.3)$$

$$\le c_{21} \left(\int_0^{t-1} \iint_{|x-y|<t-\tau} \frac{|u|^{p\varrho}}{l_p(\eta;\varepsilon_1,\varepsilon_2)^p}\, dy\, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{t-1} \iint_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)^q\, l_p(\eta;\varepsilon_1,\varepsilon_2)^q\, dy\, d\tau \right)^{\frac{1}{q}}$$

Dabei ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ε_1 und ε_2 seien positive, hinreichend kleine Zahlen.
Sei nun $p = \frac{2}{\varrho}$, $q = \frac{2}{2-\varrho} > 6$.

Dann gilt:

$$\int_0^{t-1}\int_{|x-y|<t-\tau} \frac{|u|^{p\varrho}}{1_p(\eta;\varepsilon_1,\varepsilon_2)^p}\,dy\,d\tau$$

$$\leqslant \int_0^{t-1}\int_{\substack{|x-y|<t-\tau \\ \eta<\frac{1}{2}}} \frac{|u|^2}{1_p(\eta;\varepsilon_1,\varepsilon_2)^p}\,dy\,d\tau + \int_0^{t-1}\int_{\substack{|x-y|<t-\tau \\ \eta\geqslant\frac{1}{2}}} \frac{|u|^2}{1_p(\eta;\varepsilon_1,\varepsilon_2)^p}\,dy\,d\tau$$

$$\leqslant c_{22}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int u^2\sigma^2\,d\omega\,d\xi\right]\eta^{-(1-p\varepsilon_2)}\,d\eta + \int_{\frac{1}{2}}^{t-1}\left[\int u^2\sigma^2\,d\omega\,d\xi\right]\eta^{-(1+p\varepsilon_1)}\,d\eta\right\} \qquad (1.4)$$

$$\leqslant c_{23}\,E$$

Nach Lemma 2 gilt ferner:

$$\left(\int_0^{t-1}\int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)^q\, 1_p(\eta;\varepsilon_1,\varepsilon_2)^q\,dy\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c_{24}\,.$$

Von $I_c(0,t)$ bleibt nun nur noch abzuschätzen:

$$\left|\int_{\substack{t-1 \\ |u|\leq 1}}^{t}\int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\,G'(u)\,dy\,d\tau\right|$$

$$\leqslant c_{25}\left|\int_{\substack{t-1 \\ |u|\leq 1}}^{t}\int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\,|u|^{\varrho}\,dy\,d\tau\right|$$

$$\leqslant c_{26}\left(\int_{t-1}^{t}\int_{|x-y|<t-\tau} |u|^{\tilde{p}\varrho}\,dy\,d\tau\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}}\left(\int_{t-1}^{t}\int_{|x-y|<t-\tau} dy\,d\tau\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}}$$

mit $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$.

Wählen wir nun $\tilde{p} = \frac{2}{\rho}$, so wird obiger Ausdruck abgeschätzt durch:

$$\left| \int_{t-1}^{t} \int_{\substack{|x-y|<t-\tau \\ |u|\leq 1}} k(\mu)\, G'(u)\, dy\, d\tau \right|$$

$$\leqslant c_{27} \left(\int_{t-1}^{t} d\tau \right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \left(\int_{t-1}^{t} (t-\tau)^3\, d\tau \right)^{\frac{1}{\tilde{q}}} \leqslant c_{28} \qquad (1.5)$$

Insgesamt gilt also:

$|I_c(0,t)| \leqslant$ const für $\rho > \frac{5}{3}$.

Als nächstes muß $I_s(0,t)$ abgeschätzt werden. Falls $\rho \geqslant 2$ gilt, so läßt sich $I_s(0,t-1)$ so behandeln:

$$|I_s(0,t-1)| \leqslant c_{29} \int_0^{t-1} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

$$\leqslant c_{30} \int_0^{t-1} \int_{|x-y|=t-\tau} \left[u^2 + G(u)\right] dS_y\, d\tau$$

$$\leqslant c_{31}\, E \qquad \text{nach Lemma 1b).}$$

Für $\frac{5}{3} < \rho < 2$ muß man so schließen:

$$\int_0^{t-1} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

$$\leqslant c_{32} \left(\int_0^{t-1} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|u|^{\rho}}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau + \int_0^{t-1} \int_{|x-y|=t-\tau} G(u)\, dS_y\, d\tau \right) \qquad (1.6)$$

Der zweite Summand ist beschränkt durch $c_{33}\, E$ und weiter gilt:

$$\int_0^{t-1} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|u|^{\rho}}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

$$\leqslant c_{34}\Big(\int_0^{t-1}\int_{|x-y|=t-\tau} |u|^{\bar{p}\beta}\, dS_y\, d\tau\Big)^{\frac{1}{\bar{p}}}\Big(\int_0^{t-1}\int_{|x-y|=t-\tau} \frac{1}{(t-\tau)^{\bar{q}}}\, dS_y\, d\tau\Big)^{\frac{1}{\bar{q}}} \qquad (1.7)$$

Wählen wir $\bar{p} = \frac{2}{\beta}$, $\bar{q} = \frac{2}{2-\beta} > 6$, so bleibt der erste Faktor nach Lemma 1b) beschränkt, und der zweite Faktor läßt sich leicht behandeln:

$$\Big(\int_0^{t-1}\int_{|x-y|=t-\tau} \frac{1}{(t-\tau)^{\bar{q}}}\, dS_y\, d\tau\Big)^{\frac{1}{\bar{q}}} \leqslant c_{35}\Big(\int_0^{t-1}(t-\tau)^{2-\bar{q}}\, d\tau\Big)^{\frac{1}{\bar{q}}} \leqslant c_{36} \qquad (1.8)$$

Also gilt:

$$\int_0^{t-1}\int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau \leqslant c_{37}$$

Bleibt noch zu betrachten:

$$\int_{t-1}^{t}\int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

$$\leqslant \int_{\substack{t-1\\ |u|\leq 1}}^{t}\int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau + \int_{\substack{t-1\\ |u|\geqslant 1}}^{t}\int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

Für die einzelnen Summanden gilt nun:

$$\int_{\substack{t-1\\ |u|\leq 1}}^{t}\int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau \leqslant c_{38}\int_{t-1}^{t}\int_{|x-y|=t-\tau} \frac{1}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau \leqslant c_{39}$$

und

$$\int_{\substack{t-1\\ |u|\geqslant 1}}^{t}\int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

$$\leq c_{40} \int_{t-1}^{t} \int_{\substack{|x-y|=t-\tau \\ |u|\geq 1}} \frac{|u|^{\rho'}}{t-\tau} \, dS_y \, d\tau$$

$$\leq c_{41} \Big(\int_{t-1}^{t} \int_{\substack{|x-y|=t-\tau \\ |u|\geq 1}} |u|^{p'\rho'} \, dS_y \, d\tau \Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_{t-1}^{t} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{1}{(t-\tau)^{q'}} \, dS_y \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q'}}$$

mit $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$.

Wählen wir nun $q' = 3 - \varepsilon_3$, ε_3 genügend klein, positiv, so bleibt der zweite Faktor beschränkt, und den ersten behandeln wir wie folgt:

$$\Big(\int_{t-1}^{t} \int_{\substack{|x-y|=t-\tau \\ |u|\geq 1}} |u|^{p'\rho'} \, dS_y \, d\tau \Big)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leq \sup_{t-1\leq\tau\leq t} \| u(\tau) \|_\infty^{\delta} \Big(\int_{t-1}^{t} \int_{\substack{|x-y|=t-\tau \\ |u|\geq 1}} |u|^{p'(\rho'-\delta)} \, dS_y \, d\tau \Big)^{\frac{1}{p'}}$$

mit $1 > \delta \geq 0$.

Wegen

$$p' = \frac{q'}{q'-1} = \frac{3-\varepsilon_3}{2-\varepsilon_3} = \frac{3}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2(2-\varepsilon_3)}$$

kann man ein $0 \leq \delta < 1$ so wählen, daß $p'(\rho'-\delta) \leq \rho'+1$ wird, nämlich

$$\delta \geq \rho' - \frac{\rho'+1}{p'} = \rho' - \frac{\rho'+1}{\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2(2-\varepsilon_3)}} \quad ,$$

und dies ist für $\rho' < 5$ für genügend kleines $\varepsilon_3 > 0$ kleiner als 1.

Also gilt dann folgende Abschätzung:

$$\Big(\int_{t-1}^{t} \int_{\substack{|x-y|=t-\tau \\ |u|\geq 1}} |u|^{p'\rho'} \, dS_y \, d\tau \Big)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leq c_{42} \sup_{t-1\leq\tau\leq t} \| u(\tau) \|_\infty^{\delta} \Big(\int_{t-1}^{t} \int_{\substack{|x-y|=t-\tau \\ |u|\geq 1}} |u|^{\rho'+1} \, dS_y \, d\tau \Big)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leq c_{43} \sup_{t-1\leq\tau\leq t} \|u(\tau)\|_\infty^{\mu} \left(\int_{t-1}^{t} \int_{|x-y|=t-\tau} G(u)\, dS_y\, d\tau \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leq c_{44} \sup_{t-1\leq\tau\leq t} \|u(\tau)\|_\infty^{\mu}$$

nach Lemma 1b) mit $0 \leq \mu < 1$.

Insgesamt haben wir damit folgende Abschätzung erhalten:

$$\|u(t)\|_\infty \leq c_{45} \left(1 + \sup_{t-1\leq\tau\leq t} \|u(\tau)\|_\infty^{\mu} \right) .$$

Hieraus folgt aber die Beschränktheit von $\|u(t)\|_\infty$.

Als nächstes soll gezeigt werden, daß auch noch für $\varrho \leq \frac{5}{3}$ eine Abschätzung der $L^\infty(\mathbb{R}^3)$-Norm von $u(x,t)$ bewiesen werden kann.

Theorem 2:

Hinsichtlich G seien die gleichen Voraussetzungen gemacht wie in Theorem 1, nur $\varrho \leq \frac{5}{3}$. Dann gilt folgende Abschätzung:

$$\|u(t)\|_\infty \leq \begin{cases} c_{46} \log(2+t) & \text{für } \varrho = \frac{5}{3},\ \varrho' < 2 \\ c_{47} [\log(2+t)]^{1+\varepsilon} & \text{für } \varrho = \frac{5}{3}, 5 > \varrho' \geq 2 \\ c_{48} (1+t)^{\frac{5-3\varrho}{2}} [\log(2+t)]^{\frac{\varrho}{2}} & \text{für } \frac{5}{3} > \varrho,\ \varrho' < 2 \\ c_{49} (1+t)^{\frac{5-3\varrho}{2}+\varepsilon} & \text{für } \frac{5}{3} > \varrho, 5 > \varrho' \geq 2 \end{cases}$$

mit einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$.

Beweis:

Im Wesentlichen lassen sich die Schlüsse des Beweises von Theorem 1 wiederholen. So folgt aus den Beziehungen (1.1) - (1.4) die Relation:

$$\left| \int_0^{t-1} \int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\, G'(u)\, dy\, d\tau \right|$$

$$\leqslant c_{50} \left\{ 1 + \left(\int_0^{t-1} (t-\tau)^{2-\frac{9}{2}-q\varepsilon_2}\, d\tau \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^{t-1} (t-\tau)^{2-\frac{9}{2}+q\varepsilon_1}\, d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int u^2 \sigma^2 d\omega d\xi \right] \eta^{-(1-p\varepsilon_2)} d\eta + \int_{\frac{1}{2}}^{t-1} \left[\int u^2 \sigma^2 d\omega d\xi \right] \eta^{-(1+p\varepsilon_1)} d\eta \right\}^{\frac{1}{p}}$$

mit $q = \frac{2}{2-\varrho}$, $p = \frac{2}{\varrho}$.

Falls nun $\varrho \leqslant \frac{5}{3}$ ist, kann dies i.a. nicht mehr durch eine Konstante abgeschätzt werden, sondern es gilt vielmehr für $\varrho < \frac{5}{3}$ mit $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 > 0$:

$$\left| \int_0^{t-1} \int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\, G'(u)\, dy\, d\tau \right|$$

$$\leqslant c_{51} \left\{ 1 + (1+t)^{(3-\frac{9}{2}-q\varepsilon_2)\frac{1}{q}} + (1+t)^{(3-\frac{9}{2})\frac{1}{q}} \right\} \left[\log(2+t)\right]^{\frac{\varrho}{2}}$$

$$\leqslant c_{52}\ (1+t)^{\frac{3}{q}-\frac{1}{2}}\ \left[\log(2+t)\right]^{\frac{\varrho}{2}}$$

$$= c_{52}\ (1+t)^{\frac{5-3\varrho}{2}}\ \left[\log(2+t)\right]^{\frac{\varrho}{2}} .$$

Im Fall $\varrho = \frac{5}{3}$ wähle man ebenfalls $\varepsilon_1 = 0$. Dann ergibt sich:

$$\left| \int_0^{t-1} \int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\, G'(u)\, dy\, d\tau \right|$$

$$\leq c_{53}\Big\{\int_0^{\frac{1}{2}}\Big[\int u^2\sigma^2 d\omega d\xi\Big]\,\eta^{-(1-p\varepsilon_2)}d\eta + \int_{\frac{1}{2}}^{t-1}\Big[\int u^2\sigma^2 d\omega d\xi\Big]\,\eta^{-1}\,d\eta\Big\}^{\frac{1}{p}}\cdot$$

$$\cdot\Big(\int_0^{t-1}\int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)^q\, l_p(\eta;\varepsilon_1,\varepsilon_2)^q\, dy\, d\tau\Big)^{\frac{1}{q}}$$

mit $p = \frac{2}{\varrho}$, $q = \frac{2}{2-\varrho}$, d.h. $p = \frac{6}{5}$, $q = 6$.

Dies kann dann abgeschätzt werden durch:

$$|I_c(0,t-1)|$$
$$\leq c_{54}\,\big[\log(2+t)\big]^{\frac{5}{6}}\,\big[\log(2+t)\big]^{\frac{1}{6}}$$
$$= c_{54}\,\log(2+t)$$

Nach (1.2) und (1.5) ist $|I_c(t-1,t)|$ durch eine Konstante abschätzbar.

Nach (1.6), (1.7), (1.8) folgt:

$$\Big|\int_0^{t-1}\int_{|x-y|=t-\tau}\frac{|G'(u)|}{t-\tau}\,dS_y\,d\tau\Big| \leq c_{55}\Big\{1 + \Big(\int_0^{t-1}(t-\tau)^{3-\bar{q}}\,d\tau\Big)^{\frac{1}{\bar{q}}}\Big\}$$

mit $\bar{q} = \frac{2}{2-\varrho}$.

Falls $\bar{q} > 3$, d.h. $\varrho > \frac{4}{3}$, so ist dies beschränkt.

Falls $\bar{q} = 3$, d.h. $\varrho = \frac{4}{3}$, so gilt eine Abschätzung durch $c_{59}\big[\log(2+t)\big]^{\frac{1}{3}}$.

Falls $\bar{q} < 3$, d.h. $\varrho < \frac{4}{3}$, so gilt eine Abschätzung durch $c_{56}\,(1+t)^{\frac{3}{\bar{q}}-1} = c_{56}\,(1+t)^{2-\frac{3}{2}\varrho}$.

Damit erhält man analog zu Theorem 1:

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant \begin{cases} c_{57}\Big[(1+t)^{\frac{5-3\varrho}{2}}\big[\log(2+t)\big]^{\frac{\varrho}{2}} + \sup\limits_{t-1\le\tau\le t}\|u(\tau)\|_\infty^{\mu}\Big] & \\ \qquad\qquad \text{für } \frac{5}{3} > \varrho > \frac{4}{3} & \\ c_{58}\Big[\log(2+t) + \sup\limits_{t-1\le\tau\le t}\|u(\tau)\|_\infty^{\mu}\Big] \text{für } \varrho = \frac{5}{3} & \\ c_{59}\Big[(1+t)^{\frac{5-3\varrho}{2}}\big[\log(2+t)\big]^{\frac{\varrho}{2}} + \big[\log(2+t)\big]^{\frac{1}{3}} & \\ \quad + \sup\limits_{t-1\le\tau\le t}\|u(\tau)\|_\infty^{\mu}\Big] \qquad \text{für } \varrho = \frac{4}{3} & \\ c_{60}\Big[(1+t)^{\frac{5-3\varrho}{2}}\big[\log(2+t)\big]^{\frac{\varrho}{2}} + (1+t)^{2-\frac{3}{2}\varrho} & \\ \quad + \sup\limits_{t-1\le\tau\le t}\|u(\tau)\|_\infty^{\mu}\Big] \qquad \text{für } \varrho < \frac{4}{3} & \end{cases}$$

mit $\mu = \max(0, \varrho' - \frac{\varrho'+1}{\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2(2-\varepsilon_3)}})$.

Es ist nun $\frac{5-3\varrho}{2} > 2 - \frac{3}{2}\varrho$, also ergibt sich damit:

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant \begin{cases} c_{61}\Big[\log(2+t) + \sup\limits_{t-1\le\tau\le t}\|u(\tau)\|_\infty^{\mu}\Big] \text{ für } \varrho = \frac{5}{3} & \\ c_{62}\Big[(1+t)^{\frac{5-3\varrho}{2}}\big[\log(2+t)\big]^{\frac{\varrho}{2}} + \sup\limits_{t-1\le\tau\le t}\|u(\tau)\|_\infty^{\mu}\Big] & \\ \qquad\qquad \text{für } \varrho < \frac{5}{3} & \end{cases}$$

Für $\varrho' < 2$ ist nun $\mu = 0$, und es ergibt sich:

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant \begin{cases} c_{63}\ \log(2+t) & \text{für } \varrho = \frac{5}{3},\ \varrho' < 2 \\ c_{64}\ (1+t)^{\frac{5-3\varrho}{2}}\big[\log(2+t)\big]^{\frac{\varrho}{2}} & \text{für } \varrho < \frac{5}{3},\ \varrho' < 2 \end{cases}$$

Für $5 > \varrho' \geqslant 2$ gilt:

$$0 < \mu = \varrho' - \frac{\varrho' + 1}{\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2(2-\varepsilon_3)}} < 1$$

und damit, wenn man definiert:

$$\|u(t^*)\|_\infty := \max_{0\le\tau\le t}\|u(\tau)\|_\infty$$

$$\|u(t^*)\|_\infty \leqslant c_{65}\big((1+t)^{\frac{5-3\varrho}{2}+\tilde{\varepsilon}_1} + \|u(t^*)\|_\infty^{\mu}\big) \qquad \text{für } \frac{5}{3} > \varrho$$

$$\|u(t^*)\|_\infty^{\gamma} \left(\|u(t^*)\|_\infty^{1-\gamma} - c_{65} \right) \leq c_{65} \, (1+t)^{\frac{5-3\rho}{2} + \tilde{\varepsilon}_1}$$

Entweder gilt nun

$$\|u(t^*)\|_\infty^{1-\gamma} \leq 2 \, c_{65}$$

und damit

$$\|u(t^*)\|_\infty \leq (2 \, c_{65})^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

oder

$$\|u(t^*)\|_\infty^{\gamma} \cdot c_{65} \leq c_{65} \, (1+t)^{\frac{5-3\rho}{2} + \tilde{\varepsilon}_1}, \text{ d.h.}$$

$$\|u(t^*)\|_\infty \leq c_{66} \, (1+t)^{\left(\frac{5-3\rho}{2} + \tilde{\varepsilon}_1\right)\frac{1}{\gamma}} .$$

Somit erhalten wir für $5 > \rho' \geq 2$ folgende Abschätzung:

$$\|u(t)\|_\infty \leq c_{67} \, (1+t)^{\left(\frac{5-3\rho}{2} + \tilde{\varepsilon}_1\right)\frac{1}{\gamma}} \qquad \text{mit } \tilde{\varepsilon}_1 > 0 \text{ beliebig.}$$

Wählen wir nun ε_3 so, daß γ nahe bei 1 liegt, so gilt:

$$\|u(t)\|_\infty \leq c_{68} \, (1+t)^{\frac{5-3\rho}{2} + \varepsilon_4}$$

mit einem beliebig kleinen $\varepsilon_4 > 0$.

Entsprechendes gilt für die anderen Fälle, womit das Theorem bewiesen ist.

Das nächste Ziel besteht darin, analoge Theorema für den Fall verschwindender Masse m = 0 zu beweisen.

Theorem 3:

Es gilt für die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + G'(u) = 0$$

zu Anfangswerten φ, ψ mit obigen Regularitätseigenschaften:

$|u(x,t)| \leqslant$ const. ,
falls folgende zusätzliche Bedingungen an G erfüllt sind:

$|G'(u)| \leqslant c_{69} \, |u|^{\varrho}$ für $|u| \leqslant 1$ mit $\varrho > 2$

$|u|^{\varrho+1} \leqslant c_{70} \, G(u)$ für $|u| \leqslant 1$.

Beweis:
Die zur obigen Differentialgleichung gehörige Integralgleichung lautet:

$$u(x,t) = u_0(x,t) - \frac{1}{4\pi} \int_0^t \iint_{|x-y|=t-\tau} \frac{G'(u(y,\tau))}{t-\tau} \, dS_y \, d\tau \quad ,$$

wobei $u_0(x,t)$ die Lösung der linearen Differentialgleichung zu den vorgegebenen Anfangswerten ist.
Es gilt:
$|u_0(x,t)| \leqslant$ const.
und weiter:

$$\left| \int_0^t \iint_{|x-y|=t-\tau} \frac{G'(u)}{t-\tau} \, dS_y \, d\tau \right|$$

$$\leqslant \left| \int_0^{t-1} \iint_{|x-y|=t-\tau} \frac{G'(u)}{t-\tau} \, dS_y \, d\tau \right| + \left| \int_{t-1}^t \iint_{|x-y|=t-\tau} \frac{G'(u)}{t-\tau} \, dS_y \, d\tau \right|$$

Abschätzung der Summanden liefert:

$$\int_0^{t-1} \iint_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau} \, dS_y \, d\tau$$

$$\leqslant \int_0^{t-1} \iint_{\substack{|x-y|=t-\tau \\ |u| \leqslant 1}} \frac{|G'(u)|}{t-\tau} \, dS_y \, d\tau + \int_0^{t-1} \iint_{\substack{|x-y|=t-\tau \\ |u| \geqslant 1}} \frac{|G'(u)|}{t-\tau} \, dS_y \, d\tau$$

Es ist

$$\int_0^{t-1}\int_{\substack{|x-y|=t-\tau\\ |u|\geq 1}} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau \leqslant c_{71} \int_0^{t-1}\int_{|x-y|=t-\tau} G(u)\, dS_y\, d\tau \leqslant c_{78}$$

sowie

$$\int_0^{t-1}\int_{\substack{|x-y|=t-\tau\\ |u|\leq 1}} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

$$\leqslant c_{72} \int_0^{t-1}\int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|u|^{\rho}}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

$$\leqslant c_{73}\Big(\int_0^{t-1}\int_{|x-y|=t-\tau} |u|^{p\rho}\, dS_y\, d\tau\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{t-1}\int_{|x-y|=t-\tau} \frac{1}{(t-\tau)^q}\, dS_y\, d\tau\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Sei $p = \frac{\rho+1}{\rho}$, $q = \rho+1$. Damit ergibt sich:

$$\int_0^{t-1}\int_{\substack{|x-y|=t-\tau\\ |u|\leq 1}} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

$$\leqslant c_{74}\Big(\int_0^{t-1}\int_{\substack{|x-y|=t-\tau\\ |u|\leq 1}} |u|^{\rho+1}\, dS_y\, d\tau\Big)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\Big(\int_0^{t-1}\int_{|x-y|=t-\tau} \frac{1}{(t-\tau)^{\rho+1}}\, dS_y\, d\tau\Big)^{\frac{1}{\rho+1}}$$

$$\leqslant c_{75}\Big(\int_0^{t-1}\int_{|x-y|=t-\tau} G(u)\, dS_y\, d\tau\Big)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\Big(\int_0^{t-1} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\rho-1}}\Big)^{\frac{1}{\rho+1}} \qquad (1.9)$$

Der erste Faktor ist nach Lemma 1b) beschränkt und der zweite ebenfalls für $\rho > 2$.

Bliebe noch $\int_{t-1}^{t}\int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$ zu betrachten.

Dieser Term kann aber genauso behandelt werden wie der entsprechende im Beweis zu Theorem 1, so daß wir wie dort schließlich erhalten:

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant c_{76}\ \Big(\ 1 + \sup_{t-1\leq\tau\leq t} \|\ u(\tau)\ \|_\infty^{\gamma}\ \Big)$$

mit einem $\gamma < 1$, woraus wiederum die Behauptung folgt.

Auch für kleinere ϱ läßt sich wie im relativistischen Fall auch hier eine Abschätzung der $L^\infty(\mathbb{R}^3)$-Norm der Lösung herleiten.

Theorem 4:
Voraussetzungen hinsichtlich G wie in Theorem 3, nur ϱ ist jetzt kleiner oder gleich 2. Dann gilt folgende Abschätzung:

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant \begin{cases} c_{77}\ (1+t)^{\frac{2-\varrho}{\varrho+1}} & \text{für } \varrho' < 2,\ \varrho < 2 \\ c_{78}\ (1+t)^{\frac{2-\varrho}{\varrho+1}+\tilde{\varepsilon}} & \text{für } 5 > \varrho' \geqslant 2,\ \varrho < 2 \\ c_{79}\ \big[\log(2+t)\big]^{\frac{1}{3}} & \text{für } \varrho' < 2,\ \varrho = 2 \\ c_{80}\ \big[\log(2+t)\big]^{\frac{1}{3}+\tilde{\tilde{\varepsilon}}} & \text{für } 5 > \varrho' \geqslant 2,\ \varrho = 2 \end{cases}$$

Dabei sind $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\tilde{\varepsilon}}$ positive, beliebig kleine Zahlen.

Beweis:
Auch hier lassen sich im Wesentlichen die Schlüsse des Beweises von Theorem 3 wiederholen. So wurde dort in (1.9) bewiesen:

$$\int_0^{t-1}\int_{\substack{|x-y|=t-\tau \\ |u|\leq 1}} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau \leqslant c_{81}\Big(\int_0^{t-1} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\varrho-1}}\Big)^{\frac{1}{\varrho+1}}$$

Dieser Term ist jetzt i.a. nicht mehr beschränkt, sondern abschätzbar durch:

$$\int_0^{t-1}\int_{\substack{|x-y|=t-\tau\\ |u|\le 1}} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau \le c_{82}\,(1+t)^{\frac{2-\varrho}{\varrho+1}} \quad \text{für } \varrho < 2$$

sowie durch

$$\int_0^{t-1}\int_{\substack{|x-y|=t-\tau\\ |u|\le 1}} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau \le c_{83}\,[\log(2+t)]^{\frac{1}{3}} \text{ für } \varrho = 2.$$

Alle anderen Terme lassen sich analog zu Theorem 3 behandeln, so daß wir schließlich erhalten:

$$\|u(t)\|_\infty \le \begin{cases} c_{84}\,(1+t)^{\frac{2-\varrho}{\varrho+1}} & \text{für } \varrho' < 2,\ \varrho < 2 \\ c_{85}\left[(1+t)^{\frac{2-\varrho}{\varrho+1}} + \sup\limits_{t-1\le\tau\le t} \|u(\tau)\|_\infty^{\mu}\right] & 5 > \varrho' \ge 2,\ \varrho < 2 \\ c_{86}\,[\log(t+2)]^{\frac{1}{3}} & \text{für } \varrho' < 2,\ \varrho = 2 \\ c_{87}\left\{[\log(t+2)]^{\frac{1}{3}} + \sup\limits_{t-1\le\tau\le t} \|u(\tau)\|_\infty^{\mu}\right\} & 5 > \varrho' \ge 2,\ \varrho = 2 \end{cases}$$

mit einem $\mu < 1$.

Wie im Beweis zu Theorem 2 kann man nun schließen:

$$\|u(t)\|_\infty \le c_{88}\,(1+t)^{\frac{2-\varrho}{\varrho+1}+\tilde{\varepsilon}}, \quad \tilde{\varepsilon} > 0 \text{ beliebig klein}$$
$$\text{für } 5 > \varrho' \ge 2,\ \varrho < 2$$

sowie

$$\|u(t)\|_\infty \le c_{89}\,[\log(2+t)]^{\frac{1}{3}+\tilde{\tilde{\varepsilon}}}, \quad \tilde{\tilde{\varepsilon}} > 0 \text{ beliebig klein}$$
$$\text{für } 5 > \varrho' \ge 2,\ \varrho = 2.$$

§ 3 Der Abfall gegen Null für große Zeiten

Das nächste Ziel besteht darin, für gewisse ϱ einen asymptotischen zeitlichen Abfall der Lösung der betrachteten Differentialgleichung herzuleiten. Dazu benötigen wir zunächst einige Lemmata.

Lemma 3:
Es gelte außer den Voraussetzungen (I),(II),(III),(IV) an G zusätzlich:
$G'(u)u - 2G(u) \geqslant a'G(u) \geqslant 0$
mit einem positiven a'.
Dann ist

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \frac{G(u)}{|x|}\, dx\, dt \leqslant c_0 E .$$

Beweis:
Wir gehen aus von folgender Beziehung:

$$\begin{aligned}
&(u_r + r^{-1}u)(u_{tt} - \Delta u + m^2 u + G'(u)) \\
&= (r^{-1}(x\cdot\nabla u + u)u_t)_t + \operatorname{div}\Big\{ r^{-1}\Big[-\tfrac{1}{2} u_t^2 x - (x\cdot\nabla u)\nabla u \\
&\quad + \tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 x - u\nabla u - \tfrac{1}{2} r^{-2}u^2 x + (\tfrac{1}{2}m^2u^2 + G(u))x\Big]\Big\} \\
&\quad + r^{-1}(|\nabla u|^2 - r^{-2}(x\cdot\nabla u)^2) + r^{-1}(G'(u)u - 2G(u))
\end{aligned}$$

Dabei sei $r := |x|$, $u_r := r^{-1}x\cdot\nabla u$.

Für einen Beweis dieser Identität siehe [9] , Seite 291/292 und [14] , Theorem 2.2, Seite 426.

Diese Beziehung wird integriert über $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbb{R}^3$.
Sei zunächst $0 < \delta < \delta_0$.
Dann gilt:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (r^{-1}(x\cdot\nabla u + u)u_t)_t \, dx \, dt$$

$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} ((u_r + r^{-1}u)u_t)_t \, dx \, dt$$

$$= \left[\int_{\mathbb{R}^3} (u_r + r^{-1}u)u_t \, dx \right]_0^T$$

und weiterhin, wenn wir den Ausdruck in der geschweiften Klammer von oben mit H bezeichnen:

$$\int_0^T \int_{|x|\geq\delta} \operatorname{div} H \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\varepsilon+t+k\geq|x|\geq\delta} \operatorname{div} H \, dx \, dt \quad ,$$

da $\operatorname{Tr} u \subset \{|x| \leq t + k\}$, falls $\operatorname{Tr}\varphi$, $\operatorname{Tr}\psi \subset \{|x| \leq k\}$.
Also ergibt sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes:

$$\int_0^T \int_{|x|\geq\delta} \operatorname{div} H \, dx \, dt = -\int_0^T \int_{|x|=\delta} (H,\xi) \, d\omega_\xi \, dt$$

Wir behandeln zunächst das Oberflächenintegral.
Es gilt:

$$\left| \int_{|x|=\delta} (H,\xi) \, d\omega_\xi + \int_{|x|=\delta} \frac{1}{2} u^2 \frac{(x,\xi)}{|x|^3} \, d\omega_\xi \right|$$

$$\leq \sup_{\substack{0\leq|x|\leq\delta_0 \\ 0\leq t\leq T}} \left| -\frac{1}{2} u_t^2 x - (x\cdot\nabla u)\nabla u + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 x - u\nabla u + \left(\frac{1}{2} m^2 u^2 + G(u)\right)x \right| \cdot \int_{|x|=\delta} \frac{1}{|x|} \, d\omega_\xi$$

$$\leq c_1 \cdot \delta \quad .$$

Wegen $\xi_i = \frac{x_i}{\delta}$ folgt damit:

$$\left| \int_{|x|=\delta} (H,\xi)\, d\omega_\xi + \int_{|x|=\delta} \frac{1}{2} \frac{u^2(0,t)}{\delta^2}\, d\omega_\xi \right|$$

$$\leq c_1\delta + \int_{|x|=\delta} \frac{1}{2} \frac{|u^2(x,t) - u^2(0,t)|}{\delta^2}\, d\omega_\xi$$

$$\leq c_1\delta + c_2 \sup_{\substack{|x|\leq\delta \\ 0\leq t\leq T}} |u^2(x,t) - u^2(0,t)| \quad \to 0 \text{ , falls } \delta \to 0.$$

Also ist

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} H\, dx\, dt = 2\pi \int_0^T u^2\, dt \Big|_{r=0} ,$$

woraus wiederum folgt:

$$2\pi \int_0^T u^2\, dt \Big|_{r=0} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} r^{-1} \left\{ |\nabla u|^2 - u_r^2 + G'(u)u - 2G(u) \right\} dx\, dt$$

$$= - \left[\int_{\mathbb{R}^3} (u_r + r^{-1}u)u_t\, dx \right]_0^T .$$

Die rechte Seite wird mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung und der Beziehung

$$(u_r + r^{-1}u)^2 = u_r^2 + 2r^{-2}u(x\cdot\nabla u) + r^{-2}u^2$$

$$= u_r^2 + \operatorname{div}(r^{-2}u^2 x)$$

umgeformt:

$$2 \int_{t=T} \left\{ r^{-1}(ru_r + u)u_t \right\} dx$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ u_t^2 + r^{-2}(x\cdot\nabla u + u)^2 \right\} dx$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ u_t^2 + r^{-2}(x\cdot\nabla u)^2 + \operatorname{div}(r^{-2}u^2 x) \right\} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} (u_t^2 + u_r^2)\, dx$$

$$\leqslant 2E \ .$$

Entsprechend behandelt man das Integral bei $t = 0$. Die linke Seite obiger Beziehung enthält die nichtnegativen Teile $2\pi u^2$ sowie $r^{-1}(|\nabla u|^2 - u_r^2)$, und wegen der Voraussetzung an G folgt die Behauptung.

Lemma 4:
Seien ε, T, S > 0 , $S_1 := S + 4T + (S+k+2T)\exp(2c_0 TE\varepsilon^{-1})$.
Dabei sei $\operatorname{Tr}\varphi$, $\operatorname{Tr}\psi \subset \{|x| \leqslant k\}$.
Dann existiert ein Teilintervall I von $[S,S_1]$ der Länge 2T, so daß

$$\int_I \int_{\mathbb{R}^3} G(u)\, dx\, dt < \varepsilon$$

gilt.

Beweis:

Sei $a_n := \int_{S+2T(n-1)}^{S+2Tn} \left(\int_{\mathbb{R}^3} G(u)\, dx \right) dt$.

Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S+k+2Tn} \leqslant \int_0^{\infty} \int_{|x|<t+k} \frac{G(u)}{t+k}\, dx\, dt \leqslant \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{G(u)}{|x|}\, dx\, dt \leqslant c_0 E$$

nach Lemma 3, da $u(x,t)$ verschwindet für $|x| > t+k$.
Angenommen, es sei $a_n \geqslant \varepsilon$ für alle $n \in \{1,2,\ldots,N\}$.
Dann gilt:

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{N} (S + k + 2Tn)^{-1} \leqslant c_0 E$$

oder

$$\sum_{n=1}^{N} (\alpha + n)^{-1} \leqslant 2c_0 ET\varepsilon^{-1} ,$$

wobei $\alpha := (S + k)(2T)^{-1}$.

Da die linke Seite dieser Ungleichung größer ist als $\log(N(\alpha+1)^{-1})$, folgt:

$$N < (\alpha + 1) \exp\{2c_0 ET\varepsilon^{-1}\}$$

und damit nach der Definition von S_1:

$$2TN < (S + k + 2T)\{\exp 2c_0 ET\varepsilon^{-1}\} = S_1 - S - 4T .$$

Diese Beziehung kann aber nicht für alle $N \in \mathbb{N}$ richtig sein. Also existiert ein Intervall der Länge $2T$ in $[S,S_1]$, für das $a_n < \varepsilon$ ist. Damit ist das Lemma 4 bewiesen.

Lemma 5:

Sei $m \neq 0$, und es sollen bezüglich G die Voraussetzungen von Theorem 1 erfüllt sein.
Weiterhin gelte:

$$|u|^a \leqslant c_3 G(u) \qquad \text{für } |u| \leqslant 1 \quad \text{mit einem } a > \varrho$$

$|G''(u)| \leqslant c_4 \, |u|^b$ für $|u| < 1$ mit einem $b > 0$.

Ferner sei $0 \leqslant t_2 \leqslant t_1 < t$.

Dann gilt:

$$|I(t-t_1, t-t_2)| \leqslant c_5 \, (1+t_1)^{\alpha} \Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} G(u) \, dy \, d\tau \Big)^{\beta}$$

mit $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$.

Beweis:

Es gilt:

$$|I_c(t-t_1, t-t_2)|$$

$$\leqslant c_6 \int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} |G'(u)| \, dy \, d\tau$$

$$\leqslant c_7 \int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} |u|^{\beta} \, dy \, d\tau$$

$$\leqslant c_8 \Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} dy \, d\tau \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} |u|^{\beta q} \, dy \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}}$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q = \frac{a}{\beta}$.

Damit wird:

$$\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} |G'(u)| \, dy \, d\tau$$

$$\leqslant c_9 \Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} |u|^{a} \, dy \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} (t-\tau)^3 \, d\tau \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant c_{10}\, t_1^{\frac{4}{p}} \Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} G(u)\, dy\, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}}$$

Also haben wir erreicht:

$$|I_c(t-t_1, t-t_2)| \leqslant c_{11}\, t_1^{\frac{4}{p}} \Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} G(u)\, dy\, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}} .$$

Bleibt noch $I_s(t-t_1, t-t_2)$ zu betrachten.
Es gilt nach dem Gaußschen Satz:

$$\Big| \int_{|x-y|=t-\tau} G'(u)\, dS_y \Big| \leqslant c_{12} \int_{|x-y|<t-\tau} \Big(|G''(u)|\,|u_\sigma| + \frac{|G'(u)|}{\sigma} \Big) dy$$

Also gilt auch:

$$|I_s(t-t_1, t-t_2)|$$

$$\leqslant c_{13} \Big| \int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{G'(u)}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau \Big|$$

$$\leqslant c_{14} \int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} \Big(|G''(u)|\,|u_\sigma| + \frac{|G'(u)|}{\sigma} \Big) \frac{1}{t-\tau}\, dy\, d\tau .$$

Wir schätzen die Terme nun einzeln folgendermaßen ab:

$$\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} |G''(u)|\,|u_\sigma| \frac{1}{t-\tau}\, dy\, d\tau$$

$$\leqslant c_{15} \int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} |u|^b |u_\sigma| \frac{1}{t-\tau}\, dy\, d\tau$$

$$\leq c_{16}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2}\int_{|x-y|<t-\tau} |u|^{b(\varrho+1)}\,dy\,d\tau\Big)^{\frac{1}{\varrho+1}}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2}\int_{|x-y|<t-\tau}\Big|\frac{u_\sigma}{t-\tau}\Big|^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}\,dy\,d\tau\Big)^{\frac{\varrho}{\varrho+1}}$$

$$\leq c_{17}\,t_1^{d}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2}\int_{|x-y|<t-\tau} G(u)\,dy\,d\tau\Big)^{\frac{1}{e}}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2}\int_{|x-y|<t-\tau}\Big|\frac{u_\sigma}{t-\tau}\Big|^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}\,dy\,d\tau\Big)^{\frac{\varrho}{\varrho+1}}$$

nach der Hölderschen Ungleichung, angewandt auf den ersten Faktor mit gewissen positiven Zahlen d,e.
Der zweite Faktor wird wie folgt weiter behandelt:

$$\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2}\int_{|x-y|<t-\tau}\Big|\frac{u_\sigma}{t-\tau}\Big|^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}\,dy\,d\tau\Big)^{\frac{\varrho}{\varrho+1}}$$

$$\leq c_{18}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2}\Big\{\Big[\int_{|x-y|<t-\tau}|u_\sigma|^{p_1\cdot\frac{\varrho+1}{\varrho}}\,dy\Big]^{\frac{1}{p_1}}\Big[\int_{|x-y|<t-\tau}\Big|\frac{1}{t-\tau}\Big|^{q_1\frac{\varrho+1}{\varrho}}\,dy\Big]^{\frac{1}{q_1}}\Big\}d\tau\Big)^{\frac{\varrho}{\varrho+1}}$$

Dabei sei $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1$, $p_1=\frac{2\varrho}{\varrho+1}$, $q_1=\frac{p_1}{p_1-1}=\frac{2\varrho}{\varrho-1}$,

so daß dann entsteht:

$$\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2}\int_{|x-y|<t-\tau}\Big|\frac{u_\sigma}{t-\tau}\Big|^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}\,dy\,d\tau\Big)^{\frac{\varrho}{\varrho+1}}$$

$$\leq c_{18}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2}\Big\{\Big(\int_{|x-y|<t-\tau}u_\sigma^2\,dy\Big)^{\frac{\varrho+1}{2\varrho}}\Big(\int_{|x-y|<t-\tau}\Big|\frac{1}{t-\tau}\Big|^{\frac{2(\varrho+1)}{\varrho-1}}\,dy\Big)^{\frac{\varrho-1}{2\varrho}}\Big\}d\tau\Big)^{\frac{\varrho}{\varrho+1}}$$

$$\leq c_{19}\sup_{t-t_1\leq\tau\leq t-t_2}\|u_\sigma\|_{L^2}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2}(t-\tau)^{\left(3-\frac{2(\varrho+1)}{\varrho-1}\right)\frac{\varrho-1}{2\varrho}}\,d\tau\Big)^{\frac{\varrho}{\varrho+1}}$$

$$\leq c_{19}\sup_{t-t_1\leq\tau\leq t-t_2}\|u_\sigma\|_{L^2}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2}(t-\tau)^{\frac{\varrho-5}{2\varrho}}\,d\tau\Big)^{\frac{\varrho}{\varrho+1}}$$

Der erste Faktor ist nach Lemma 1a) beschränkt, und die

Potenz des Integranden ist für $\varrho > \frac{5}{3}$ größer als -1.
Also gilt die Abschätzung:

$$\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} |G''(u)|\,|u_\sigma|\,\frac{1}{t-\tau}\,dy\,d\tau$$

$$\leqslant c_{20}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} G(u)\,dy\,d\tau\Big)^{\frac{1}{e}} \cdot t_1^{d} \cdot t_1^{\left(\frac{\varrho-5}{2\varrho}+1\right)\frac{\varrho}{\varrho+1}}$$

$$= c_{20}\, t_1^{\frac{3\varrho-5}{2(\varrho+1)}+d} \Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} G(u)\,dy\,d\tau\Big)^{\frac{1}{e}}$$

Der nächste zu behandelnde Term ist:

$$\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} \frac{|G'(u)|}{(t-\tau)\sigma}\,dy\,d\tau$$

$$\leqslant c_{21} \int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} \frac{|u|^{\varrho}}{(t-\tau)\sigma}\,dy\,d\tau$$

$$\leqslant c_{22}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} |u|^{3\varrho}\,dy\,d\tau\Big)^{\frac{1}{3}} \Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} \Big|\frac{1}{(t-\tau)\sigma}\Big|^{\frac{3}{2}}\,dy\,d\tau\Big)^{\frac{2}{3}}$$

$$\leqslant c_{23}\, t_1^{d'}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} \int_{|x-y|<t-\tau} G(u)\,dy\,d\tau\Big)^{\frac{1}{e'}} \Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} \Big(\int_{|x-y|<t-\tau} \Big|\frac{1}{\sigma}\Big|^{\frac{3}{2}} dy\Big) \Big|\frac{1}{t-\tau}\Big|^{\frac{3}{2}} d\tau\Big)^{\frac{2}{3}}$$

mit gewissen positiven d', e' .

Es gilt:

$$\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} \Big(\int_{|x-y|<t-\tau} \Big|\frac{1}{\sigma}\Big|^{\frac{3}{2}}\,dy\Big)\,\Big|\frac{1}{t-\tau}\Big|^{\frac{3}{2}}\,d\tau\Big)^{\frac{2}{3}} \leqslant c_{24}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2} d\tau\Big)^{\frac{2}{3}} \leqslant c_{25}\, t_1^{\frac{2}{3}}.$$

Insgesamt gilt damit:

$$|I(t-t_1,t-t_2)|$$

$$\leqslant c_{26}\left\{ t_1^{\frac{4}{p}}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2}\int_{|x-y|<t-\tau} G(u)\,dy\,d\tau\Big)^{\frac{1}{q}} + t_1^{\frac{3q-5}{2(q+1)}+d}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2}\int_{|x-y|<t-\tau} G(u)\,dy\,d\tau\Big)^{\frac{1}{e}} \right.$$

$$\left. + t_1^{1+d'}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2}\int_{|x-y|<t-\tau} G(u)\,dy\,d\tau\Big)^{\frac{1}{e'}} \right\}$$

$$\leqslant c_{27}\,(1+t_1)^{\alpha}\Big(\int_{t-t_1}^{t-t_2}\int_{|x-y|<t-\tau} G(u)\,dy\,d\tau\Big)^{\beta}$$

mit $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$.

Lemma 6:

Seien alle bisherigen Voraussetzungen erfüllt und ε , T, S > 0 vorgegeben. Dann gibt es eine Zahl $S_2 = S_2(\varepsilon,T,S)$ mit der folgenden Eigenschaft: es gibt in $[S,S_2]$ ein Intervall I der Länge T, so daß $\sup_I |u| < \varepsilon$ gilt $(m \neq 0)$.

Beweis:

Es gilt:

$u(x,t) = u_0(x,t) + I(0,t-T) + I(t-T,t)$.

Dabei sei T eine noch zu fixierende Zahl $0 < T < t$.

Wegen

$$|u_0(x,t)| \leqslant \frac{c_{28}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}$$

gibt es ein S, so daß

$$|u_0(x,t)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad \text{für } t \geqslant S.$$

Als nächster muß der Term I(0,t-T) betrachtet werden.

Es gilt:

$$|I(0,t-T)|$$

$$\leqslant c_{29}\left\{\int_0^{t-T}\int_{|x-y|=t-\tau}\frac{|G'(u)|}{t-\tau}\,dS_y\,d\tau+\int_0^{t-T}\int_{|x-y|<t-\tau}k(\mu)|G'(u)|\,dy\,d\tau\right\}$$

und weiter

$$\int_0^{t-T}\int_{|x-y|=t-\tau}\frac{|G'(u)|}{t-\tau}\,dS_y\,d\tau\leqslant c_{30}\int_0^{t-T}\int_{|x-y|=t-\tau}\frac{|u|^{\rho}}{t-\tau}\,dS_y\,d\tau$$

$$\leqslant c_{31}\left(\int_0^{t-T}\int_{|x-y|=t-\tau}|u|^{p\rho}\,dS_y\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{t-T}\int_{|x-y|=t-\tau}\frac{dS_y\,d\tau}{(t-\tau)^q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ und

$$\left(\int_0^{t-T}\int_{|x-y|=t-\tau}\frac{dS_y\,d\tau}{(t-\tau)^q}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant c_{32}\left(\int_0^{t-T}(t-\tau)^{2-q}\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant c_{33}\,T^{\frac{3}{q}-1}$$

für $q>3$.
Wählen wir $q>3$ und p so, daß $p\rho\geqslant 2$ wird, so kann man erreichen, daß für $\rho>\frac{5}{3}$ gilt:

$$\int_0^{t-T}\int_{|x-y|=t-\tau}\frac{|G'(u)|}{t-\tau}\,dS_y\,d\tau$$

$$\leqslant c_{34}\left(\int_0^{t-T}\int_{|x-y|=t-\tau}|u|^2\,dS_y\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}T^{\frac{3}{q}-1}$$

$$\leqslant c_{35}\,T^{\frac{3}{q}-1}\qquad\underline{(2.1)}$$

Fernerhin:

$$\int_0^{t-\tau}\int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\ |G'(u)|\ dy\ d\tau$$

$$\leqslant c_{36} \int_0^{t-\tau}\int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\ |u|^{\varsigma}\ dy\ d\tau$$

$$\leqslant c_{37}\Big(\int_0^{t-\tau}\int_{|x-y|<t-\tau} |u|^{p'\varsigma}\ 1_{p'}(\eta;\tilde{\varepsilon},\tilde{\tilde{\varepsilon}})^{-p'}\ dy\ d\tau\Big)^{\frac{1}{p'}} \cdot$$

$$\cdot\Big(\int_0^{t-\tau}\int_{|x-y|<t-\tau} 1_{p'}(\eta;\tilde{\varepsilon},\tilde{\tilde{\varepsilon}})^{q'}\ k(\mu)^{q'}\ dy\ d\tau\Big)^{\frac{1}{q'}}$$

wobei $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$ und $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\tilde{\varepsilon}} > 0$ beliebig klein.

Wählt man nun p' so, daß $p'\varsigma \geqslant 2$ wird, so kann man den ersten Faktor folgendermaßen abschätzen:

$$\int_0^{t-\tau}\int_{|x-y|<t-\tau} |u|^{p'\varsigma}\ 1_{p'}(\eta;\tilde{\varepsilon},\tilde{\tilde{\varepsilon}})^{-p'}\ dy\ d\tau$$

$$\leqslant c_{38}\Big\{\int_0^{t-\tau}\int_{\substack{|x-y|<t-\tau\\ \eta<\frac{1}{2}}} |u|^2\ \frac{1}{\eta^{1-p'\tilde{\varepsilon}}}\ dy\ d\tau + \int_0^{t-\tau}\int_{\substack{|x-y|<t-\tau\\ \eta\geqslant\frac{1}{2}}} |u|^2\ \frac{1}{\eta^{1+p'\tilde{\varepsilon}}}\ dy\ d\tau\Big\}$$

$$\leqslant c_{39}\Big\{\int_0^{\frac{1}{2}}\Big[\int\int |u|^2\sigma^2\ d\omega\ d\xi\Big]\cdot\frac{1}{\eta^{1-p'\tilde{\varepsilon}}}\ d\eta$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\Big[\int\int |u|^2\sigma^2\ d\omega\ d\xi\Big]\cdot\frac{1}{\eta^{1+p'\tilde{\varepsilon}}}\ d\eta\Big\}$$

$\leqslant$ const nach Lemma 1b).

Nach Lemma 2 gilt:

$$\left(\int_0^{t-T}\int_{|x-y|<t-\tau} l_{p'}(\eta;\tilde{\varepsilon},\tilde{\tilde{\varepsilon}})^{q'}\, k(\mu)^{q'}\, dy\, d\tau\right)^{\frac{1}{q'}} \leqslant c_{40}\, T^{\frac{3}{q'}-\frac{1}{2}+\tilde{\varepsilon}},$$

falls $q' > 6$.

Also kann $p'\varrho \geqslant 2$ gewählt werden, falls $\varrho > \frac{5}{3}$, womit gilt:

$$\int_0^{t-T}\int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\, |G'(u)|\, dy\, d\tau \leqslant c_{41}\, T^{\frac{3}{q'}-\frac{1}{2}+\tilde{\varepsilon}} \qquad (2.2)$$

für $q' > 6$.

Also ist damit insgesamt bewiesen, daß gilt:

$$|I(0,t-T)| \leqslant c_{42}\, T^{-\omega} \qquad (2.3)$$

mit einem $\omega > 0$, falls $\varrho > \frac{5}{3}$.

Also kann T so fixiert werden, daß

$|I(0,t-T)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ wird.

Um $|I(t-T,t)|$ abzuschätzen, verwenden wir jetzt Lemma 5. Danach wird:

$$|I(t-T,t)| \leqslant c_{43}\, (1+T)^{\alpha}\left(\int_{t-T}^{t}\int_{|x-y|<t-\tau} G(u)\, dy\, d\tau\right)^{\beta}$$

mit $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$.

Nach Lemma 4 wähle man ein Intervall $[t^*-2T,t^*]$ mit $t^* \geqslant 2T+S$, ersetze das dortige ε durch ein ε', das der Relation $\frac{\varepsilon}{3} = c_{43}\, (1+T)^{\alpha}\, \varepsilon'^{\beta}$ genügt. Falls dann $t^*-T < t < t^*$ gilt, so ist das Integrationsintervall $[t-T,t]$ enthalten in $[t^*-2T,t^*]$, und es gilt folglich: $|I(t-T,t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, so daß wir insgesamt erhalten:

$|u(x,t)| < \varepsilon$ in $[t^*-T,t^*]$,
womit das Lemma bewiesen ist.

Corollar:
Unter den Voraussetzungen von Lemma 6 gilt für $0 < T < t$ eine Abschätzung der Form:

$$|I(0,t-T)| \leqslant \frac{c}{T^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \quad .$$

Beweis:
Die Aussage folgt sofort aus (2.1) und (2.2) für hinreichend große q und q'.

Theorem 5:
Unter den Voraussetzungen von Lemma 6 mit $\varrho > \frac{8}{3}$, $m \neq 0$, gilt:
$u(x,t)$ konvergiert gegen Null gleichmäßig für $t \to \infty$.

Beweis:
Wir spalten $u(x,t)$ mit später noch festzulegenden Konstanten T,t^{**} wie folgt auf:
$u(x,t) = u_0(x,t) + I(0,t-T) + I(t-T,t^{**}) + I(t^{**},t)$.
Nach Lemma 6 wählen wir zunächst ein t^*, so daß gilt:
$|u| < \varepsilon$ in $[t^*-T,t^*]$.
Dann definieren wir:
$t^{**} := \sup \{ s \mid \|u\|_\infty < \varepsilon \text{ in } [t^*-T,s] \}$.
Falls $t^{**} = \infty$, ist nichts mehr zu beweisen. Also sei von nun an angenommen $t^{**} < \infty$, und es sei weiter $0 < \delta < 1$ und $t^{**} < t < t^{**} + \delta$.
Wegen

$$|u_0(x,t)| \leqslant \frac{c_{44}}{(1+t)^{3/2}}$$

gilt:

$$|u_o| < \frac{c_{45}}{T^{\frac{1}{2}}} \quad , \text{ da } \quad t \geq t^{**} \geq T.$$

Der Term $I(0,t-T)$ wird nach (2.3) abgeschätzt durch:

$$|I(0,t-T)| \leq c_{46}\, T^{-\tilde{\omega}} \quad \text{mit } \tilde{\omega} > 0 \quad \text{für } \varrho > \frac{5}{3}.$$

Ähnlich wird auch der Term $I(t-T,t^{**})$ behandelt unter Benutzung der Definition von t^{**}, nämlich folgendermaßen:

$$|I(t-T;t^{**})|$$

$$\leq c_{47}\left\{\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau + \int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)|G'(u)|\, dy\, d\tau\right\}$$

und weiter

$$\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

$$\leq c_{48} \int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|u|^{\varrho}}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

$$\leq c_{49}\left(\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|=t-\tau} |u|^{\tilde{p}\varrho}\, dS_y\, d\tau\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}}\left(\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{dS_y\, d\tau}{(t-\tau)^{\tilde{q}}}\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}}$$

$$\leq c_{50}\left(\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|=t-\tau} |u|^{\tilde{p}\varrho}\, dS_y\, d\tau\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}}\left(\int_{t-T}^{t^{**}} (t-\tau)^{2-\tilde{q}}\, d\tau\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}}$$

$$\leq c_{51} \sup_{t-T\leq\tau\leq t^{**}} \|u(\tau)\|_{\infty}^{\alpha}\left(\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|=t-\tau} |u|^{\tilde{p}(\varrho-\alpha)}\, dS_y\, d\tau\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \cdot T^{\frac{3}{\tilde{q}}-1} .$$

Dabei sei $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$, $\tilde{q} < 3$.

Wählen wir nun $\tilde{q} = 3 - \varepsilon_1$, $\tilde{p} = \frac{3-\varepsilon_1}{2-\varepsilon_1} = \frac{3}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2(2-\varepsilon_1)}$ und α so, daß $\tilde{p}(\varrho - \alpha) = 2$ wird, d.h. $\alpha = \varrho - \frac{2}{\tilde{p}}$, so ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

$$\leqslant c_{52} \sup_{t-T\leq\tau\leq t^{**}} \|u(\tau)\|_\infty^{\varrho-\frac{2}{\tilde{p}}} \left(\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|=t-\tau} |u|^2\, dS_y\, d\tau \right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \cdot T^{\frac{\varepsilon_1}{3-\varepsilon_1}}$$

$$\leqslant c_{53} \sup_{t-T\leq\tau\leq t^{**}} \|u(\tau)\|_\infty^{\varrho-\frac{4}{3}+\varepsilon_2} \cdot T^{\varepsilon_3} .$$

Fernerhin gilt:

$$\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\, |G'(u)|\, dy\, d\tau$$

$$\leqslant c_{54} \int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\, |u|^\varrho\, dy\, d\tau$$

$$\leqslant c_{55} \left(\int_{t-\tau}^{t^{**}} \int_{|x-y|<t-\tau} |u|^{\tilde{p}'\varrho}\, l_{p'}(\eta;\tilde{\varepsilon},\tilde{\tilde{\varepsilon}})^{-\tilde{p}'}\, dy\, d\tau \right)^{\frac{1}{\tilde{\tilde{p}}'}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|<t-\tau} l_{p'}(\eta;\tilde{\varepsilon},\tilde{\tilde{\varepsilon}})^{\tilde{q}'}\, k(\mu)^{\tilde{q}'}\, dy\, d\tau \right)^{\frac{1}{\tilde{\tilde{q}}'}} ,$$

wobei $\frac{1}{\tilde{\tilde{p}}'} + \frac{1}{\tilde{\tilde{q}}'} = 1$ und $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\tilde{\varepsilon}} > 0$ beliebig klein.

Schätzt man nun den zweiten Faktor gemäß Lemma 2 ab, so erhält man:

$$\left(\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)^{\tilde{q}'}\, l_{p'}(\eta;\tilde{\varepsilon},\tilde{\tilde{\varepsilon}})^{q'}\, dy\, d\tau \right)^{\frac{1}{\tilde{\tilde{q}}'}} \leqslant c_{56}\, T^{\frac{3}{\tilde{q}'}-\frac{1}{2}+\tilde{\varepsilon}} \quad \text{für } \tilde{q}' < 6.$$

Damit folgt:

$$\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\ |G'(u)|\ dy\ d\tau$$

$$\leq c_{57} \sup_{t-T\leq\tau\leq t^{**}} \|u(\tau)\|_\infty^{\alpha'} \Big(\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|<t-\tau} |u|^{\tilde{p}'(\varrho-\alpha')} 1_{\tilde{p}'}(\eta;\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon})^{-\tilde{p}'}\, dy d\tau \Big)^{\frac{1}{\tilde{p}'}} \cdot T^{\frac{3}{\tilde{q}'}-\frac{1}{2}+\tilde{\varepsilon}}$$

Wählen wir nun $\tilde{q}' = 6 - \varepsilon_4$, $\tilde{p}' = \frac{6}{5} + \frac{\varepsilon_4}{5(5-\varepsilon_4)}$, und α' so, daß $\tilde{p}'(\varrho-\alpha') = 2$ wird, d.h. $\alpha' = \varrho - \frac{2}{\tilde{p}'}$, so ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\ |G'(u)|\ dy\ d\tau$$

$$\leq c_{58} \sup_{t-T\leq\tau\leq t^{**}} \|u(\tau)\|_\infty^{\varrho-\frac{2}{\tilde{p}'}} \Big(\int_{t-T}^{t^{**}} \int_{|x-y|<t-\tau} |u|^2\ 1_{\tilde{p}'}(\eta;\tilde{\varepsilon},\tilde{\varepsilon})^{-\tilde{p}'}\ dy\ d\tau \Big)^{\frac{1}{\tilde{p}'}} \cdot T^{\frac{3}{\tilde{q}'}-\frac{1}{2}+\tilde{\varepsilon}}$$

$$\leq c_{59} \sup_{t-T\leq\tau\leq t^{**}} \|u(\tau)\|_\infty^{\varrho-\frac{5}{3}+\varepsilon_5} \cdot T^{\varepsilon_4},$$

da das Integral beschränkt ist nach Lemma 1b).
Da auf $[t-T,t^{**}]$ gilt:
$\|u(\tau)\|_\infty \leq \varepsilon$,
so erhalten wir für $I(t-T,t^{**})$ also die Relation:
$|I(t-T,t^{**})| \leq c_{60}\ (\varepsilon^{\varrho-\frac{4}{3}+\varepsilon_2}\ T^{\varepsilon_3} + \varepsilon^{\varrho-\frac{5}{3}+\varepsilon_4}\ T^{\varepsilon_5})$.
Schließlich behandeln wir noch $I(t^{**},t)$:

$$|I(t^{**},t)| \leq c_{61} \Big\{ \int_{t^{**}}^{t} \|G'(u)\|_\infty (t-\tau)\ d\tau + \int_{t^{**}}^{t} \|G'(u)\|_\infty (t-\tau)^3\ d\tau \Big\}$$

$$\leq c_{62} \left\{ (t^{**}-t)^2 + (t^{**}-t)^4 \right\}.$$

Wählen wir nun δ so klein, daß
$c_{62}\,(\delta^2 + \delta^4) < \frac{1}{2}\varepsilon$
wird, so ergibt sich also für $t^{**} \leqslant t \leqslant t^{**} + \delta$:
$|I(t^{**},t)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$
und damit insgesamt:

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant c_{63}\,\Big(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}} + T^{-\tilde{\omega}} + \varepsilon^{\rho-\frac{4}{3}+\varepsilon_2}\cdot T^{\varepsilon_3} + \varepsilon^{\rho-\frac{5}{3}+\varepsilon_4}\,T^{\varepsilon_5}\Big) + \frac{1}{2}\varepsilon\ .$$

Wähle T so groß, daß

$c_{63}\,\big(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{T^{\tilde{\omega}}}\big) = \frac{1}{4}\varepsilon$ wird, z.B.

$T = (8c_{63})^{\frac{1}{\tilde{\omega}}}\,\varepsilon^{-\frac{1}{\tilde{\omega}}}$ ($\tilde{\omega} \leqslant \frac{3}{2}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit)

und $\varepsilon > 0$ sei so klein vorgegeben, daß

$$c_{63}\,\Big(\varepsilon^{\rho-\frac{4}{3}+\varepsilon_2}\,\varepsilon^{-\frac{\varepsilon_3}{\tilde{\omega}}}\cdot(8c_{63})^{\frac{\varepsilon_3}{\tilde{\omega}}} + \varepsilon^{\rho-\frac{5}{3}+\varepsilon_4}\,\varepsilon^{-\frac{\varepsilon_5}{\tilde{\omega}}}\,(8c_{63})^{\frac{\varepsilon_5}{\tilde{\omega}}}\Big) < \frac{1}{4}\varepsilon$$

wird. Dies ist für $\rho > \frac{8}{3}$ möglich, da die ε_i so gewählt werden können, daß sämtliche ε-Potenzen größer als 1 sind.
Dann gilt:

$$\|u(t)\|_\infty < \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon\ ,$$

was wegen $t \in (t^{**}, t^{**} + \delta]$, $\delta > 0$, im Widerspruch zur Definition von t^{**} steht.
Also ist hiermit Theorem 5 bewiesen.

§ 4 Die asymptotische Abfallgeschwindigkeit der Lösung

Voraussetzungen an die Nichtlinearität seien außer (I) - (VI) folgende:

(VII) $G'(u)u - 2G(u) \geqslant a' G(u)$ mit einem positiven a'

(VIII) $|u|^a \leqslant c_1 G(u)$ für $|u| \leqslant 1$ mit einem $a \geqslant \varrho$

(IX) $|G''(u)| \leqslant c_2 |u|^b$ für $|u| \leqslant 1$ mit einem $b > 0$.

Dabei sei $\varrho > \frac{8}{3}$.

Lemma 7:
Es seien die Voraussetzungen (I) - (IX) erfüllt. Außerdem gelte:

$$|I(0,\tfrac{t}{2})| \leqslant \frac{c_3}{(1+t)^{\alpha}} \quad \text{mit einem } \alpha \in (0,\tfrac{3}{2}] \,, \; m \neq 0.$$

Dann ist:

$$\|u(t)\|_{\infty} \leqslant \frac{c_4}{(1+t)^{\alpha}} \,.$$

Beweis:
Wir schreiben diesmal:
$u(x,t) = u_0(x,t) + I(0,\frac{t}{2}) + I(\frac{t}{2},t-T) + I(t-T,t)$
und bemerken zunächst, daß gilt:

$$|u_0(x,t)| \leqslant \frac{c_5}{(1+t)^{3/2}} \,.$$

Nächster zu behandelnder Term ist $I(\frac{t}{2},t-T)$. Es gilt:

$$|I_s(\tfrac{t}{2},t-T)|$$
$$\leqslant c_6 \Big(\int_{\frac{t}{2}}^{t-T} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau} \, dS_y \, d\tau \Big)$$

$$\leq c_7 \int_{\frac{t}{2}}^{t-\tau} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|u|^{\varrho}}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

$$\leq c_8 \Big(\int_{\frac{t}{2}}^{t-\tau} \int_{|x-y|=t-\tau} |u|^{p\varrho}\, dS_y\, d\tau \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\frac{t}{2}}^{t-\tau} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{dS_y\, d\tau}{(t-\tau)^q} \Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq c_9\, T^{\frac{3}{q}-1} \Big(\int_{\frac{t}{2}}^{t-\tau} \int_{|x-y|=t-\tau} |u|^{p\varrho}\, dS_y\, d\tau \Big)^{\frac{1}{p}} ,$$

falls $q > 3$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Wählen wir also $q = 3 + \varepsilon_6$, $p = \frac{3}{2} - \frac{\varepsilon_6}{2(2+\varepsilon_6)}$, so gilt:

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t-\tau} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

$$\leq c_{10}\, T^{-\frac{\varepsilon_6}{3+\varepsilon_6}} \sup_{\frac{t}{2}\leq\tau\leq t-\tau} \|u(\tau)\|_\infty^{\varkappa} \Big(\int_{\frac{t}{2}}^{t-\tau} \int_{|x-y|=t-\tau} |u|^{(\frac{3}{2} - \frac{\varepsilon_6}{2(2+\varepsilon_6)})(\varrho-\varkappa)}\, dS_y\, d\tau \Big)^{\frac{1}{p}}$$

Sei $\varkappa = \varrho - \frac{4}{3} - \varepsilon_7$, ε_7 geeignet gewählt, so gilt die weitere Abschätzung durch:

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t-\tau} \int_{|x-y|=t-\tau} \frac{|G'(u)|}{t-\tau}\, dS_y\, d\tau$$

$$\leq c_{11}\, T^{-\varepsilon_8} \sup_{\frac{t}{2}\leq\tau\leq t-\tau} \|u(\tau)\|_\infty^{\varrho-\frac{4}{3}-\varepsilon_7} \Big(\int_{\frac{t}{2}}^{t-\tau} \int_{|x-y|=t-\tau} |u|^2\, dS_y\, d\tau \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq c_{12}\, T^{-\varepsilon_8} \sup_{\frac{t}{2}\leq\tau\leq t-\tau} \|u(\tau)\|_\infty^{1+\varepsilon_9} \quad , \text{ falls } \varrho > \frac{7}{3} .$$

Weiter gilt:

$$|I_c(\tfrac{t}{2}, t-T)|$$

$$\leqslant c_{13} \int_{\frac{t}{2}}^{t-T} \int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\ |G'(u)|\ dy\ d\tau$$

$$\leqslant c_{14} \Big(\int_{\frac{t}{2}}^{t-T} \int_{|x-y|<t-\tau} |u|^{p'\varrho}\ l_{p'}(\eta;\varepsilon_{10},\varepsilon_{11})^{-p'}\ dy\ d\tau \Big)^{\frac{1}{p'}} \cdot$$

$$\cdot \Big(\int_{\frac{t}{2}}^{t-T} \int_{|x-y|<t-\tau} l_{p'}(\eta;\varepsilon_{10},\varepsilon_{11})^{q'}\ k(\mu)^{q'}\ dy\ d\tau \Big)^{\frac{1}{q'}}$$

Der zweite Faktor läßt sich nach Lemma 2 abschätzen durch

$$\Big(\int_{\frac{t}{2}}^{t-T} \int_{|x-y|<t-\tau} l_{p'}(\eta;\varepsilon_{10},\varepsilon_{11})^{q'}\ k(\mu)^{q'}\ dy\ d\tau \Big)^{\frac{1}{q'}} \leqslant c_{15}\ T^{\frac{3}{q'}-\frac{1}{2}+\varepsilon_{12}},$$

falls $q' > 6$.

Wählen wir also $q' = 6 + \varepsilon_{13}$, $p' = \frac{6+\varepsilon_{13}}{5+\varepsilon_{13}} = \frac{6}{5} - \varepsilon_{14}$, so gilt:

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t-T} \int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\ |G'(u)|\ dy\ d\tau$$

$$\leqslant c_{16}\ T^{\frac{3}{6+\varepsilon_{13}}-\frac{1}{2}+\varepsilon_{12}} \sup_{\frac{t}{2}\leq\tau\leq t-T} \|u(\tau)\|_{\infty}^{\beta} \cdot$$

$$\cdot \Big(\int_{\frac{t}{2}}^{t-T} \int_{|x-y|<t-\tau} |u|^{(\frac{6}{5}-\varepsilon_{14})(\varrho-\beta)}\ l_{p'}(\eta;\varepsilon_{10},\varepsilon_{11})^{-p'}\ dy\ d\tau \Big)^{\frac{1}{p'}}$$

Mit $\beta = \varrho - \frac{5}{3} - \varepsilon_{15}$, ε_{15} geeignet gewählt, läßt sich weiter abschätzen:

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t-\tau} \int_{|x-y|<t-\tau} k(\mu)\,|G'(u)|\,dy\,d\tau$$

$$\leqslant c_{17}\, T^{-\varepsilon_{16}} \sup_{\frac{t}{2}\leq\tau\leq t-\tau} \|u(\tau)\|_\infty^{\beta-\frac{5}{3}-\varepsilon_{15}} \left(\int_{\frac{t}{2}}^{t-\tau} \int_{|x-y|<t-\tau} |u|^2\, l_{p'}(\eta;\varepsilon_{10},\varepsilon_{11})^{-p'}\,dy\,d\tau \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqslant c_{18}\, T^{-\varepsilon_{16}} \sup_{\frac{t}{2}\leq\tau\leq t-\tau} \|u(\tau)\|_\infty^{1+\varepsilon_{17}} ,$$

falls $\beta > \frac{8}{3}$.

Damit haben wir folgende Abschätzung gewonnen:

$$|I(\tfrac{t}{2},t-T)| \leqslant c_{19} \sup_{\frac{t}{2}\leq\tau\leq t-\tau} \|u(\tau)\|_\infty^{1+\varepsilon_{18}} \cdot T^{-\varepsilon_{19}}$$

$$\leqslant c_{19}\, T^{-\varepsilon_{19}} \sup_{\frac{t}{2}\leq\tau\leq t-\tau} \left(\|u(\tau)\|_\infty \frac{(1+\tau)^\alpha}{(1+\frac{t}{2})^\alpha} \right)$$

für $\beta > \frac{8}{3}$ und $\alpha \in (0,\frac{3}{2}]$.

Führen wir die Funktion

$$M_\alpha(t) := \sup_{0\leq s\leq t} (1+s)^\alpha \|u(s)\|_\infty$$

ein, so gilt damit:

$$|I(\tfrac{t}{2},t-T)| \leqslant c_{20}\, T^{-\varepsilon_{19}} \frac{M_\alpha(t)}{(1+t)^\alpha} \qquad \text{für alle } \alpha\in(0,\tfrac{3}{2}] .$$

Schließlich hat man wegen $|G'(u)| \leqslant c_{21}|u|^\beta$ $(\beta > \frac{8}{3})$ für $|u| \leqslant 1$ und $\sup_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+} |u| \leqslant c_{22}$ die Ungleichung:

$|G'(u)| \leqslant c_{23}|u|^2$

und somit ist:

$$|I(t-T,t)|$$

$$\leqslant c_{24}\left(\int_{t-T}^{t} \|G'(u)\|_\infty\,(t-\tau)\,d\tau + \int_{t-T}^{t} \|G'(u)\|_\infty\,(t-\tau)^3\,d\tau \right)$$

$$\leqslant c_{25}\ \Big(T^2 \sup_{t-T\leq\tau\leq t} \|u(\tau)\|_\infty^2 + T^4 \sup_{t-T\leq\tau\leq t} \|u(\tau)\|_\infty^2 \Big)$$

$$\leqslant c_{26}\ T^4\ \frac{M_\alpha(t)}{(1+t)^\alpha} \sup_{t-T\leq\tau\leq t} \|u(\tau)\|_\infty \ .$$

Insgesamt gilt damit:

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{c_5}{(1+t)^{3/2}} + \frac{c_3}{(1+t)^\alpha} + c_{20}\ T^{-\varepsilon_{19}}\ \frac{M_\alpha(t)}{(1+t)^\alpha}$$

$$+ c_{26}\ T^4 \sup_{t-T\leq\tau\leq t} \|u(\tau)\|_\infty \quad \frac{M_\alpha(t)}{(1+t)^\alpha} \ .$$

Wähle T so groß, daß $c_{20}\ T^{-\varepsilon_{19}} < \frac{1}{4}$ wird, und ε so klein, daß $c_{26}\ T^4 \varepsilon < \frac{1}{4}$ ist, und t_0 so groß, daß $|u(x,t)| < \varepsilon$ für alle x, $t \geqslant t_0$ wird. Dies ist nach Theorem 5 möglich. Dann ist die Summe der letzten beiden Terme nicht größer als $\frac{1}{2}\ \frac{M_\alpha(t)}{(1+t)^\alpha}$ für $t \geqslant t_0 + T$.

Folglich gilt:

$$(1+t)^\alpha\ \|u(t)\|_\infty \leqslant c_{27} + \frac{1}{2}\ M_\alpha(t) \ ,$$

woraus mit

$$(1+\bar{t})^\alpha\ \|u(\bar{t})\|_\infty := \sup_{t_0+T\leq\tau\leq t} (1+\tau)^\alpha \|u(\tau)\|_\infty$$

folgt:

$$(1+\bar{t})\ \|u(\bar{t})\|_\infty \leqslant c_{27} + \frac{1}{2}\ M_\alpha(t)$$

$$\leqslant c_{27} + c_{28} + \frac{1}{2}\ (1+\bar{t})^\alpha\ \|u(\bar{t})\|_\infty$$

und damit

$M_\alpha(t) \leqslant c_{29}$, d.h. $\|u(t)\|_\infty \leqslant \frac{c_{30}}{(1+t)^\alpha}$.

Lemma 8:
Unter den Voraussetzungen (I) - (IX) gilt:

$$\|u(t)\|_\infty \leq \frac{c_{31}}{(1+t)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0.$$

Beweis:
Man nehme die gleiche Aufspaltung von $u(x,t)$ vor wie in Lemma 7 und behandle den Term $I(0,\frac{t}{2})$ mit Hilfe des Corollars zu Lemma 6 für $T = \frac{t}{2}$.

Lemma 9:
Es seien die Voraussetzungen (I) - (IX) erfüllt.
Außerdem gelte:

(X) $\quad G(u) \in C^4(\mathbb{R}) \ , \ \varphi \in C_0^4(\mathbb{R}^3) \ , \ \psi \in C_0^3(\mathbb{R}^3)$

(XI) $\quad |G''(u)| \leq c_{32}|u|^{\beta-1} \quad$ für $|u| \leq 1$

(XII) $\quad |G'''(u)| \leq c_{33}|u|^{\beta-2} \quad$ für $|u| \leq 1$

und ferner

$$\|u(t)\|_\infty \leq \frac{c_{34}}{(1+t)^\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha \in (0,\tfrac{3}{2}] .$$

Dann hat man die Ungleichungen:

$$\|\nabla^2 u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq c_{35}((1+t)^{\alpha(1-\beta)+1} + 1) \quad \text{für } \alpha(1-\beta)+1 \neq 0$$

$$\|\nabla^2 u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq c_{36} \log(1+t) \quad \text{für } \alpha(1-\beta)+1 = 0$$

sowie die gleiche Abschätzung für $\|\nabla u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.

Beweis:
Es bezeichne ∇^2 irgendeine zweite Ableitung nach den Raumvariablen. Wir bemerken zunächst, daß wegen $G(u) \in C^4(\mathbb{R})$ auch $u \in C^3(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)$ gilt, wie man aus [8]

entnimmt. Multiplizieren wir die Wellengleichung skalar mit $-\Delta u_t$, so entsteht:

$$0 = (u_{tt} - \Delta u + m^2 u + G'(u) \ , \ -\Delta u_t) = \frac{dP}{dt} + Q$$

mit

$$P := \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} m^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

$$Q := \int_{\mathbb{R}^3} \nabla G'(u) \cdot \nabla u_t \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} G''(u) \nabla u \cdot \nabla u_t \, dx \ .$$

Es gilt:

$$\int_0^t |Q(\tau)| d\tau$$

$$\leqslant c_{37} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{\varrho-1} |\nabla u| |\nabla u_t| \, dx \, d\tau$$

$$\leqslant c_{38} \sup_{0\leq\tau\leq t} \left(\|(\nabla u)(\tau)\|_{L^2} \cdot \|(\nabla u_t)(\tau)\|_{L^2} \right) \int_0^t \|u(\tau)\|_\infty^{\varrho-1} \, d\tau$$

$$\leqslant c_{39} \sup_{0\leq\tau\leq t} \left(\|(\nabla u)(\tau)\|_{L^2} \|(\nabla u_t)(\tau)\|_{L^2} \right) \int_0^t \frac{1}{(1+\tau)^{\alpha(\varrho-1)}} d\tau$$

$$\leqslant c_{40} \sup_{0\leq\tau\leq t} \left(\|(\nabla u)(\tau)\|_{L^2} \|(\nabla u_t)(\tau)\|_{L^2} \right) \frac{(1+t)^{\alpha(1-\varrho)+1} - 1}{\alpha(1-\varrho) + 1}$$

für $\alpha(1-\varrho) + 1 \neq 0$

und

$$\int_0^t |Q(\tau)| \, d\tau$$

$$\leqslant c_{41} \sup_{0\leq\tau\leq t} \left(\|(\nabla u)(\tau)\|_{L^2} \|(\nabla u_t)(\tau)\|_{L^2} \right) \log(1+t)$$

für $\alpha(1-\varrho) + 1 = 0$.

Mit Benutzung von Lemma 1 folgt dann:

$$\int_0^t |Q(\tau)|\, d\tau$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \sup_{0\leq\tau\leq t} \|\nabla u_t(\tau)\|_{L^2}^2 + c_{42}\left(\frac{(1+t)^{\alpha(1-\varrho)+1} - 1}{\alpha(1-\varrho)+1}\right)^2$$

für $\alpha(1-\varrho) + 1 \neq 0$

und

$$\int_0^t |Q(\tau)|\, d\tau$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \sup_{0\leq\tau\leq t} \|\nabla u_t(\tau)\|_{L^2}^2 + c_{43}\left[\log(1+t)\right]^2$$

für $\alpha(1-\varrho) + 1 = 0$

Daraus, sowie aus $P(t) = P(0) - \int_0^t Q(\tau)\, d\tau$ folgt dann:

$$P(t) \leqslant c_{44} + \frac{1}{4} \sup_{0\leq\tau\leq t} \|\nabla u_t(\tau)\|_{L^2}^2 + c_{42}\left(\frac{(1+t)^{\alpha(1-\varrho)+1} - 1}{\alpha(1-\varrho)+1}\right)^2$$

für $\alpha(1-\varrho) + 1 \neq 0$

sowie

$$P(t) \leqslant c_{45} + c_{46}\left[\log(1+t)\right]^2 + \frac{1}{4} \sup_{0\leq\tau\leq t} \|\nabla u_t(\tau)\|_{L^2}^2$$

für $\alpha(1-\varrho) + 1 = 0$.

Unter Berücksichtigung der Definition von $P(t)$ entnimmt man daraus die Abschätzungen:

$$\|\nabla u_t(\tau)\|_{L^2} \leqslant c_{47} \frac{(1+t)^{\alpha(1-\varrho)+1} - 1}{\alpha(1-\varrho)+1} \quad \text{für } \alpha(1-\varrho) + 1 \neq 0$$

und

$$\|\nabla u_t(\tau)\|_{L^2} \leqslant c_{48} \log(1+t) \quad \text{für } \alpha(1-\varrho) + 1 = 0$$

sowie

$$\|\Delta u(t)\|_{L^2} \leq c_{49} \frac{(1+t)^{\alpha(1-\varrho)+1} - 1}{\alpha(1-\varrho)+1} \quad \text{für } \alpha(1-\varrho)+1 \neq 0$$

und

$$\|\Delta u(t)\|_{L^2} \leq c_{50} \log(1+t) \qquad \text{für } \alpha(1-\varrho)+1 \neq 0 .$$

Daraus, sowie aus $\|u\|_{L^2}$, $\|\nabla u\|_{L^2} \leq$ const. folgt dann die Behauptung.

Lemma 10:

Es seien die Voraussetzungen (I) - (XII) erfüllt. Ferner sei

$$\|u(t)\|_\infty \leq \frac{c_{51}}{(1+t)^\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha \in [\tfrac{3}{8}, \tfrac{3}{2}).$$

Dann gilt:

$$\|u(t)\|_\infty \leq \frac{c_{52}}{(1+t)^\beta} ,$$

wobei $\beta = \min(\alpha+\delta, \frac{3}{2})$ mit einem von α unabhängigen $\delta > 0$.

Beweis:

Es ist

$$|I(0,\tfrac{t}{2})| \leq c_{53} \int_0^{\frac{t}{2}} |R(t-\tau) * G'(u)| \, d\tau ,$$

wobei * Faltung bzgl. der Raumvariablen bedeutet.
Für diese Faltung gilt die Abschätzung:

$$|R(t-\tau) * G'(u)| \leq c_{54} \|G'(u)\|_{H^{2,1}(\mathbb{R}^3)} (t-\tau)^{-\frac{3}{2}}$$

(vgl. z.B. [16] , Seite 298 oder [10] , Seite 27.)

Wegen

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 G'(u)\|_{L^1} &\leq c_{55}(\| |u|^{\varrho-2} |\nabla u|^2 \|_{L^1} + \| |u|^{\varrho-1} |\nabla^2 u| \|_{L^1}) \\ &\leq c_{56}(\|u\|_\infty^{\varrho-2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_\infty^{\varrho-2} \|u\|_{L^2} \|\nabla^2 u\|_{L^2}) \end{aligned}$$

und

$$\|\nabla G'(u)\|_{L^1} \leq c_{57} \| |u|^{\varrho-1} |\nabla u| \|_{L^1}$$
$$\leq c_{58} \|u\|_\infty^{\varrho-2} \|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}$$

sowie

$$\|G'(u)\|_{L^1} \leq c_{59} \|u\|_\infty^{\varrho-2} \|u\|_{L^2}^2$$

gilt dann nach Lemma 9 die Abschätzung:

$$|I(0,\tfrac{t}{2})| \leq c_{60} \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{(1+\tau)^{-(\varrho-2)\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \left((1+\tau)^{\alpha(1-\varrho)+1+\varepsilon} + 1\right) d\tau$$

mit einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$, und somit auch

$$|I(0,\tfrac{t}{2})| \leq c_{61}(1+t)^{-\frac{3}{2}} \int_0^t \left((1+\tau)^{-\alpha(\varrho-2)+\alpha(1-\varrho)+1+\varepsilon} + (1+\tau)^{-\alpha(\varrho-2)}\right) d\tau \ .$$

Man setze

$$N(k,\varrho) := \max\left(-\alpha(\varrho-2)+\alpha(1-\varrho)+1+\varepsilon, -\alpha(\varrho-2)\right)$$

Dann wird

$$|I(0,\tfrac{t}{2})| \leq c_{62} (1+t)^{-\frac{3}{2}} \left[\int_0^t (1+\tau)^{N(k,\varrho)} d\tau + 1 \right]$$

Man bestimme $\varepsilon > 0$ so, daß $N(k,\varrho) \neq -1$ wird. Dann ist

$$|I(0,\tfrac{t}{2})| \leq \frac{c_{63}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} \left((1+t)^{N(k,\varrho)+1} + 1\right)$$

$$\leq c_{64} \left((1+t)^{N(k,\varrho)-\frac{1}{2}} + (1+t)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

Wegen

$$\tfrac{1}{2} + \alpha(\varrho-2) - \alpha(1-\varrho) - 1 - \varepsilon - \alpha$$
$$= -\tfrac{1}{2} + \alpha(2\varrho-3) - \varepsilon - \alpha > -\tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{3}\alpha \geq 0$$

und

$\frac{1}{2} + \alpha(\varrho-2) - \alpha = \frac{1}{2} + \alpha(\varrho-3) > \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \geqslant 0$
für $\varrho > \frac{8}{3}$, $\frac{3}{2} > \alpha \geqslant \frac{3}{8}$ gilt nun:

$\frac{1}{2} - N(k,\varrho) - \alpha > 0$.

Somit folgt nach Lemma 7 die Behauptung.

Aus Lemma 8 und Lemma 10 entnimmt man unmittelbar das Hauptresultat dieser Arbeit, nämlich:

Theorem 6:
Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt mit $\varrho > \frac{8}{3}$, $\varrho' < 5$:

10
$$\begin{cases} G(u) \in C^4(\mathbb{R}) \ , \ \varphi \in C_0^4(\mathbb{R}^3) \ , \quad \psi \in C_0^3(\mathbb{R}^3) \\ G(u) \geqslant 0 \quad \text{für} \quad u \in \mathbb{R} \\ G(0) = 0 \\ G'(u) = F'(|u|^2)u \ , \ |F'(s)| \leqslant a[A+F(s)]^{\alpha} \text{ mit } a,A>0, \ \alpha<\frac{2}{3}, \ s\in\mathbb{R}^+ \\ G'(u)u - 2G(u) \geqslant a'G(u) \quad \text{mit einem positiven } a' \\ |G'(u)| \leqslant c_{65} |u|^{\varrho'} \qquad \text{für } |u| \geqslant 1 \\ |u|^{\varrho'+1} \leqslant c_{66} G(u) \qquad \text{für } |u| \geqslant 1 \\ |u|^{\widetilde{a}} \leqslant c_{67} G(u) \qquad \text{für } |u| \leqslant 1 \ , \ \widetilde{a} \geqslant \varrho \\ |G'''(u)| \leqslant c_{68} |u|^{\varrho-2} \quad \text{für } |u| \leqslant 1 \end{cases}$$

Dann gilt für die Lösung u(x,t) von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u + G'(u) = 0 \quad , \quad m \neq 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$$

die Abschätzung:

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant \frac{c_{69}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} .$$

Theorem 6':

Unter den Voraussetzungen $A0$ gilt:

$$\|\nabla^2 u(t)\|_{L^2} \leqslant \text{const.}$$

$$\|\nabla u_t(t)\|_{L^2} \leqslant \text{const.}$$

$$\|u_{tt}(t)\|_{L^2} \leqslant \text{const.}$$

Beweis:

Die ersten beiden Beziehungen folgen aus Lemma 9 mit $\alpha = \frac{3}{2}$, und die letzte aus der Differentialgleichung:

$$\|u_{tt}\|_{L^2} \leqslant \|\Delta u\|_{L^2} + \|m^2 u\|_{L^2} + c_{70} \||u|^\rho\|_{L^2} \leqslant \text{const.}$$

wegen Theorem 1.

§ 5 Das Verhalten der $H^{m,p}$-Normen der Lösung

Es soll jetzt zunächst das Verhalten von $\|\nabla^n u\|_\infty$ untersucht werden für alle n. Dafür müssen selbstverständlich an die Nichtlinearität G(u) derartige Bedingungen gestellt werden, daß u hinreichend oft differenzierbar ist. Wird etwa $G(u) \in C^n(\mathbb{R})$ vorausgesetzt, so soll im

folgenden immer zusätzlich gelten (mit $\varrho > \frac{8}{3}$, $\varrho' < 5$):

$$|G'(u)| \leq c_1 |u|^{\varrho} \qquad \text{für } |u| \leq 1$$

$$|G''(u)| \leq c_2 |u|^{\varrho-1} \qquad \text{für } |u| \leq 1$$

und weiter

$$|G^{(k)}(u)| \leq c_3 |u|^{\max(\varrho-k+1,0)} \qquad \text{für } |u| \leq 1 \quad (k \leq n)$$

Diese Funktionenklasse nennen wir $\tilde{C}^n(\mathbb{R})$.
Weiterhin gelte prinzipiell $m \neq 0$ sowie $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Lemma 11:
Außer den Voraussetzungen $\mathcal{N}0$ sei $G(u) \in \tilde{C}^4(\mathbb{R})$.
Dann gilt:

$$\|\nabla u\|_\infty \leq \frac{c_4}{1+t} .$$

Beweis:
Nach [17] , Theorem 5 und dem Sobolevschen Einbettungssatz (vgl. z.B. [15] , Seite 259) gilt:

$$\Big\| \int_0^t \sin(-\Delta+m^2)^{\frac{1}{2}}(t-s)(-\Delta+m^2)^{-\frac{1}{2}} G'(u)\, ds \Big\|_{H^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq \int_0^{t-1} \|\sin(-\Delta+m^2)^{\frac{1}{2}}(t-s)(-\Delta+m^2)^{-\frac{1}{2}} G'(u)\|_{H^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)}\, ds$$

$$+ \int_{t-1}^t \|\sin(-\Delta+m^2)^{\frac{1}{2}}(t-s)(-\Delta+m^2)^{-\frac{1}{2}} G'(u)\|_{H^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)}\, ds$$

$$\leq c_5 \Big(\int_0^{t-1} \frac{\|G'(u)\|_{H^{2,1}(\mathbb{R}^3)}}{t-s}\, ds + \int_{t-1}^t \|(-\Delta+m^2)^{-\frac{1}{2}} G'(u)\|_{H^{3,2}(\mathbb{R}^3)}\, ds \Big)$$

$$\leq c_6 \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} \int_0^t (t-\sigma+1)^{-1} \left\{ \|D^\alpha G'(u)\|_{L^2} + \|D^\alpha G'(u)\|_{L^1} \right\} d\sigma$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\|D^2G'(u)\|_{L^1} &\leq \|G'''(u)|Du|^2\|_{L^1} + \|G''(u)\,D^2u\|_{L^1}\\ &\leq c_7\left\{\||u|^{\varrho-2}|Du|^2\|_{L^1} + \||u|^{\varrho-1}|D^2u|\|_{L^1}\right\}\\ &\leq c_8\left\{\|u\|_\infty^{\varrho-2}\|Du\|_{L^2}^2 + \|u\|_\infty^{\varrho-2}\|u\|_{L^2}\|D^2u\|_{L^2}\right\}\\ &\leq c_9\,\frac{1}{(1+\sigma)^{(\varrho-2)\frac{3}{2}}} \qquad (5.1)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|DG'(u)\|_{L^1} = \|G''(u)\,Du\|_{L^1} &\leq c_{10}\,\||u|^{\varrho-1}|Du|\|_{L^1} \qquad (5.2)\\ &\leq c_{11}\,\|u\|_\infty^{\varrho-2}\|u\|_{L^2}\|Du\|_{L^2} \leq c_{12}\,\frac{1}{(1+\sigma)^{(\varrho-2)\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$$\|G'(u)\|_{L^1} \leq c_{13}\,\||u|^{\varrho}\|_{L^1} \leq c_{14}\,\|u\|_\infty^{\varrho-2}\|u\|_{L^2}^2 \leq c_{15}\,\frac{1}{(1+\sigma)^{(\varrho-2)\frac{3}{2}}}$$

(5.3)

sowie

$$\|G'(u)\|_{L^2} \leq c_{16}\,\||u|^{\varrho}\|_{L^2} \leq c_{17}\,\|u\|_\infty^{\varrho-2}\|u\|_{L^2} \leq c_{18}\,\frac{1}{(1+\sigma)^{(\varrho-2)\frac{3}{2}}}$$

(5.4)

$$\begin{aligned}\|DG'(u)\|_{L^2} &\leq c_{19}\,\||u|^{\varrho-1}|Du|\|_{L^2} \leq c_{20}\,\|u\|_\infty^{\varrho-1}\,\|Du\|_{L^2}\\ &\leq c_{21}\,\frac{1}{(1+\sigma)^{(\varrho-1)\frac{3}{2}}} \qquad (5.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|D^2G'(u)\|_{L^2} &\leq c_{22}\left\{\|u\|_\infty^{\varrho-2}\|Du\|_{L^4}^2 + \|u\|_\infty^{\varrho-1}\,\|D^2u\|_{L^2}\right\}\\ &\leq c_{23}\,\frac{1}{(1+\sigma)^{(\varrho-2)\frac{3}{2}}} \qquad (5.6)\end{aligned}$$

Insgesamt gilt dann also:

$$\|u(t)\|_{H^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)} \leq c_{24}\left(\frac{1}{1+t} + \int_0^t (t-\sigma+1)^{-1}(1+\sigma)^{-(\varrho-2)\frac{3}{2}}\,d\sigma\right)$$

Für $\varrho > \frac{8}{3}$ ist nun $-(\varrho-2)\frac{3}{2} < -1$ und damit nach [13], Lemma 3.1:

$$\|u(t)\|_{H^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{c_{25}}{1+t}$$

Lemma 12:
Es sei $\mathcal{A}0$ erfüllt.
Gilt zusätzlich
$G(u) \in \tilde{C}^5(\mathbb{R})$,
so ist:

$$\|\nabla^3 u\|_{L^2} \leqslant \text{const.}$$

$$\|\nabla^2 u_t\|_{L^2} \leqslant \text{const.}$$

$$\|\nabla u_{tt}\|_{L^2} \leqslant \text{const.}$$

$$\|u_{ttt}\|_{L^2} \leqslant \text{const.}$$

Beweis:
Mit $A := -\Delta + m^2$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= (Au_{tt} + A^2 u + AG'(u), Au_t) \\ &= (Au_{tt}, Au_t) + (A^{\frac{1}{2}} u, A^{\frac{1}{2}} u_t) + (AG'(u), Au_t) \\ &= \tfrac{1}{2} \tfrac{d}{dt} \|Au_t\|_{L^2}^2 + \tfrac{1}{2} \tfrac{d}{dt} \|A^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^3} AG'(u) \cdot Au_t \, dx \, . \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |Q(t)| &:= \left| \int_{\mathbb{R}^3} AG'(u)\, Au_t \, dx \right| \\ &\leqslant \|AG'(u)\|_{L^2} \|Au_t\|_{L^2} \\ &\leqslant c_{26} \|G'(u)\|_{H^2} \|Au_t\|_{L^2} \\ &\leqslant c_{27} \Big\{ \| |u|^\delta \|_{L^2} + \| |u|^{\delta-1} |\nabla u| \|_{L^2} + \| |u|^{\delta-2} |\nabla u|^2 \|_{L^2} \\ &\qquad + \| |u|^{\delta-1} \nabla^2 u \|_{L^2} \Big\} \cdot \|Au_t\|_{L^2} \\ &\leqslant c_{28} \Big\{ \|u\|_\infty^{\delta-1} \|u\|_{L^2} + \|u\|_\infty^{\delta-1} \|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_\infty^{\delta-2} \|\nabla u\|_\infty \|\nabla u\|_{L^2} \\ &\qquad + \|u\|_\infty^{\delta-1} \|\nabla^2 u\|_{L^2} \Big\} \cdot \|Au_t\|_{L^2} \end{aligned}$$

und daher

$$\int_0^t |Q(\tau)|\, d\tau$$

$$\leq c_{29} \sup_{0\leq\tau\leq t} \|Au_t(\tau)\|_{L^2} \Big\{ \sup_{0\leq\tau\leq t} \|u(\tau)\|_{L^2} \int_0^\infty \|u(\tau)\|_\infty^{\delta-1}\, d\tau$$
$$+ \sup_{0\leq\tau\leq t} \|\nabla u\|_{L^2} \int_0^\infty \|u(\tau)\|_\infty^{\delta-1}\, d\tau$$
$$+ \sup_{0\leq\tau\leq t} \|\nabla u\|_{L^2} \int_0^\infty \|u(\tau)\|_\infty^{\delta-2} \|\nabla u\|_\infty\, d\tau$$
$$+ \sup_{0\leq\tau\leq t} \|\nabla^2 u\|_{L^2} \int_0^\infty \|u(\tau)\|_\infty^{\delta-1}\, d\tau \Big\}$$

$$\leq \frac{1}{4} \sup_{0\leq\tau\leq t} \|Au_t\|_{L^2}^2 + c_{30} \quad ,$$

da die Integrale existieren.

Also folgt:

$$\|Au_t\|_{L^2} \leq c_{31}$$

$$\|A^{\frac{3}{2}} u\|_{L^2} \leq c_{32}$$

und nach der Wellengleichung gilt:

$$\|A^{\frac{1}{2}} u_{tt}\|_{L^2} \leq \|A^{\frac{3}{2}} u\|_{L^2} + \|A^{\frac{1}{2}} G'(u)\|_{L^2}$$

Mit

$$\|A^{\frac{1}{2}} G'(u)\|_{L^2} \leq c_{33} \left\{ \| |u|^{\delta-1} |\nabla u| \|_{L^2} + \| |u|^\delta \|_{L^2} \right\}$$
$$\leq c_{34} \left\{ \|u\|_\infty^{\delta-1} \|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_\infty^{\delta-1} \|u\|_{L^2} \right\}$$
$$\leq c_{35}$$

folgt dann:

$$\|A^{\frac{1}{2}} u_{tt}\|_{L^2} \leq c_{36}$$

und auch

$$0 = u_{ttt} + Au_t + (G'(u))_t$$

$$\|(G'(u))_t\|_{L^2} \leq c_{37} \|\, |u|^{\delta-1} u_t \|_{L^2} \leq c_{38} \|u\|_\infty^{\delta-1} \|u_t\|_{L^2} \leq c_{39}$$

und damit $\|u_{ttt}\|_{L^2} \leq c_{40}$, womit das Lemma bewiesen ist.

Lemma 13:
Es seien die Voraussetzungen von Lemma 12 mit $3 < \varrho$ erfüllt. Dann gilt:

$$\|\nabla u\|_\infty \leq \frac{c_{41}}{(1+t)^{\frac{3}{4}}} .$$

Beweis:
Nach [17] , Theorem 4, gilt:

$$\Big\| \int_0^t \sin(-\Delta+m^2)^{\frac{1}{2}}(t-s)(-\Delta+m^2)^{-\frac{1}{2}} G'(u)\, ds \Big\|_{H^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)}$$
$$\leq c_{42} \sum_{0\leq|\alpha|\leq 3} \int_0^t (t-\sigma+1)^{-\frac{3}{2}} \Big\{ \|D^\alpha(-\Delta+m^2)^{-\frac{1}{2}} G'(u)\|_{L^2} + \|D^\alpha G'(u)\|_{L^1} \Big\}\, d\sigma$$

Es ist

$$\|D^3 G'(u)\|_{L^1}$$
$$\leq c_{43} \Big\{ \|G^{(4)}(u)|Du|^3\|_{L^1} + \|G'''(u)|Du||D^2u|\|_{L^1} + \|G''(u)|D^3u|\|_{L^1} \Big\}$$
$$\leq c_{44} \Big\{ \| |u|^{\varrho-3}|Du|^3\|_{L^1} + \| |u|^{\varrho-2}|Du||D^2u|\|_{L^1} + \| |u|^{\varrho-1}|D^3u|\|_{L^1} \Big\}$$
$$\leq c_{45} \Big\{ \|u\|_\infty^{\varrho-3} \|Du\|_\infty \|Du\|_{L^2}^2 + \|u\|_\infty^{\varrho-2}\|Du\|_{L^2}\|D^2u\|_{L^2} + \|u\|_\infty^{\varrho-2}\|u\|_{L^2}\|D^3u\|_{L^2} \Big\}$$
$$\leq c_{46} \frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{3}{4}(\varrho-3)+1}} + \frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{3}{4}(\varrho-2)}}$$
$$\leq c_{47} \frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{3}{4}(\varrho-3)+1}}$$
$$\leq c_{48} \frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{3}{4}(\varrho-\frac{7}{3})}} \qquad (5.7)$$

Die niedrigeren Ableitungen lassen sich nach (5.1),(5.2), (5.3) abschätzen durch

$$\frac{c_{49}}{(1+\sigma)^{\frac{1}{2}(\varrho-2)}} .$$

Nach (5.6) ist:

$$\|D^2G'(u)\|_{L^2} \leq c_{50} \frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{3}{2}(\varrho-2)}}$$

Die niedrigeren Ableitungen sind nach (5.5) und (5.4) abschätzbar. Insgesamt gilt also:

$$\Big\| \int_0^t \sin(-\Delta+m^2)^{\frac{1}{2}}(t-s)(-\Delta+m^2)^{-\frac{1}{2}} G'(u)\, ds \Big\|_{H^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)}$$
$$\leq c_{51} \int_0^t \frac{1}{(t-\sigma+1)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{3}{2}(\varrho-\frac{7}{3})}}\, d\sigma$$

Damit gilt auch:

$$\|\nabla u\|_\infty \leq \begin{cases} \dfrac{c_{52}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} & \text{für } 5 > \varrho \geq \dfrac{10}{3} \\ \dfrac{c_{53}}{(1+t)^{\frac{3}{2}(\varrho-\frac{7}{3})}} & \text{für } 3 < \varrho < \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

Ausgehend von einem Abfall $\|\nabla u\|_\infty \leq \frac{c}{(1+t)^{a_n}}$ mit $a_n > 0$, erhalten wir sukzessive durch Einsetzen in (5.7):

$$\|D^3G'(u)\|_{L^1} \leq c_{54} \frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{3}{2}(\varrho-3)+a_n}}$$

d.h. der Abfall verbessert sich jeweils um $\frac{3}{2}(\varrho-3)$. Also erhalten wir nach endlich vielen Schritten:

$$\|\nabla u\|_\infty \leq \frac{c_{55}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} .$$

Lemma 14:

Unter den Voraussetzungen von Lemma 12 gilt:

$$\|\nabla u\|_\infty \leq \frac{c_{56}}{(1+t)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}} \quad \text{für } \frac{8}{3} < \varrho \leq 3$$

mit einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$.

Beweis:

Nach [17] , Theorem 4, gilt auch:

$$\Big\| \int_0^t \sin(-\Delta+m^2)^{\frac{1}{2}}(t-s)(-\Delta+m^2)^{-\frac{1}{2}}\, G'(u)\, ds \Big\|_{H^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leqslant c_{57} \sum_{0\leq|\alpha|\leq 3} \int_0^t (t-\sigma+1)^{3\mu-\frac{3}{2}} \Big\{ \| D^\alpha(-\Delta+m^2)^{-\frac{1}{2}} G'(u)\|_{L^2} + \| D^\alpha G'(u)\|_{L^{\frac{1}{1-\mu}}} \Big\}\, d\sigma \,, \qquad (5.8)$$

wobei $1 > \mu \geqslant 0$.

Es ist abzuschätzen:

$$\| D^3 G'(u)\|_{L^{\frac{1}{1-\mu}}} \qquad (5.9)$$

$$\leqslant c_{58} \Big\{ \| |Du|^3 \|_{L^{\frac{1}{1-\mu}}} + \| |u|^{\varrho-2}|Du||D^2u|\|_{L^{\frac{1}{1-\mu}}} + \| |u|^{\varrho-1}|D^3u|\|_{L^{\frac{1}{1-\mu}}} \Big\}$$

Die Summanden werden einzeln abgeschätzt durch:

$$\| |Du|^3 \|_{L^{\frac{1}{1-\mu}}} \leqslant c_{59} \|Du\|_\infty \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |Du|^{\frac{2}{1-\mu}}\, dx \Big)^{1-\mu}$$

$$\leqslant c_{60} \|Du\|_\infty^{1+2\mu} \|Du\|_{L^2}^{2(1-\mu)}$$

$$\leqslant c_{61} \|Du\|_\infty^{1+2\mu} \qquad (5.10)$$

und

$$\| |u|^{\varrho-2}|Du||D^2u|\|_{L^{\frac{1}{1-\mu}}}$$

$$\leqslant c_{62} \|u\|_\infty^{\varrho-2} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |Du|^{\frac{1}{1-\mu}} |D^2u|^{\frac{1}{1-\mu}}\, dx \Big)^{1-\mu}$$

$$\leqslant c_{63} \|u\|_\infty^{\varrho-2} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |Du|^{\frac{2}{1-2\mu}}\, dx \Big)^{\frac{1-2\mu}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |D^2u|^2\, dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant c_{64} \|u\|_\infty^{\varrho-2} \|Du\|_\infty^{2\mu} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |Du|^2\, dx \Big)^{\frac{1-2\mu}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |D^2u|^2\, dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant c_{65} \|u\|_\infty^{\varrho-2} \|Du\|_\infty^{2\mu} \qquad (5.11)$$

sowie

$$\| |u|^{\varrho-1}|D^3u|\|_{L^{\frac{1}{1-\mu}}} = \| |u|^{\varrho-2}|u||D^3u|\|_{L^{\frac{1}{1-\mu}}} \leqslant c_{66} \|u\|_\infty^{\varrho-2} \|u\|_\infty^{2\mu}$$

wie beim vorigen Term.

Die übrigen Terme lassen sich ähnlich wie dieser behandeln. Also erhalten wir folgende Abschätzung für $\rho > \frac{8}{3}$:

$$\| \int_0^t \sin(-\Delta+m^2)^{\frac{1}{2}}(t-s)(-\Delta+m^2)^{-\frac{1}{2}} G'(u)\, ds \|_{H^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq c_{67} \int_0^t \frac{1}{(t-\sigma+1)^{\frac{1}{2}-3\mu}} \frac{1}{(1+\sigma)^{1+2\mu}}\, d\sigma$$

Setzen wir $\mu_0 = \frac{1}{10}$, so entsteht $\frac{3}{2} - 3\mu_0 = 1 + 2\mu_0$, und es ergibt sich

$$\| \nabla u(t) \|_\infty \leq \frac{c_{68}}{(1+t)^{\frac{1}{2}-3\mu_0}} \quad .$$

Iteration dieses Verfahrens, ausgehend von

$$\| \nabla u(t) \|_\infty \leq \frac{c_{69}}{(1+t)^{\mu_{n-1}}}$$

in den Abschätzungen (5.8), (5.9), (5.10) und (5.11) liefert, wenn man μ_n festlegt durch die Bedingung

$$-3\mu_n + \frac{3}{2} = (-3\mu_{n-1} + \frac{3}{2})(1 + 2\mu_n) \ ,$$

daß $\mu_n \to 0$ und $\frac{3}{2} - 3\mu_n \to \frac{3}{2}$.

Also erhalten wir:

$$\| \nabla u(t) \|_\infty \leq \frac{c_{70}}{(1+t)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \quad .$$

Lemma 15:

Unter den Voraussetzungen von Lemma 12 gilt:

$$\| \nabla^2 u \|_\infty \leq \frac{c_{71}}{1+t} \quad .$$

Beweis:

Nach [17] , Theorem 5, gilt:

$$\| \int_0^t \sin(-\Delta+m^2)^{\frac{1}{2}}(t-s)(-\Delta+m^2)^{-\frac{1}{2}} G'(u)\, ds \|_{H^{2,\infty}(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq c_{72} \sum_{0\leq|\alpha|\leq 3} \int_0^t (t-\sigma+1)^{-1} \left\{ \| D^\alpha G'(u) \|_{L^2} + \| D^\alpha G'(u) \|_{L^1} \right\} d\sigma$$

Es ist

$$\| D^3 G'(u) \|_{L^1}$$
$$\leq c_{73} \left\{ \| |Du|^3 \|_{L^1} + \| |u|^{\rho-2} |Du| |D^2 u| \|_{L^1} + \| |u|^{\rho-1} |D^3 u| \|_{L^1} \right\}$$
$$\leq c_{74} \left\{ \| Du \|_\infty \| Du \|_{L^2}^2 + \| u \|_\infty^{\rho-2} \| Du \|_{L^2} \| D^2 u \|_{L^2} + \| u \|_\infty^{\rho-2} \| D^3 u \|_{L^2} \| u \|_{L^2} \right\}$$
$$\leq c_{75} \left\{ \frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} + \frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{1}{2}(\rho-2)}} \right\}$$

Weiter ist

$$\| D^3 G'(u) \|_{L^2}$$
$$\leq c_{76} \left\{ \| Du \|_\infty^2 \| Du \|_{L^2} + \| u \|_\infty^{\rho-2} \| Du \|_\infty \| D^2 u \|_{L^2} + \| u \|_\infty^{\rho-1} \| D^3 u \|_{L^2} \right\}$$
$$\leq \frac{c_{77}}{(1+\sigma)^{\frac{1}{2}}} .$$

Die anderen Terme lassen sich nach (5.1) - (5.6) behandeln.
Also ergibt sich:

$$\left\| \int_0^t \sin(-\Delta+m^2)^{\frac{1}{2}}(t-s)(-\Delta+m^2)^{-\frac{1}{2}} G'(u)\, ds \right\|_{H^{2,\infty}(\mathbb{R}^3)}$$
$$\leq c_{78} \int_0^t \frac{1}{t-\sigma+1} \frac{1}{(1+\sigma)^{1+\delta}} d\sigma \qquad \text{mit } \delta > 0.$$
$$\leq c_{79} \frac{1}{1+t} .$$

Lemma 16:
Unter den Voraussetzungen 10 mit $G(u) \in \tilde{C}^5(\mathbb{R})$ gilt für $\rho > 3$:

$$\| u \|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{c_{80}}{(1+t)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}} . \qquad \text{Dabei sei } \infty > q \geq 2 .$$

Beweis:

Es gilt:

$$\|\nabla u\|_\infty \leqslant \frac{c_{81}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leqslant \text{const.}$$

Dann ergibt sich das Ergebnis durch Interpolation:

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^q} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^q \, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant \|\nabla u\|_\infty^{\frac{q-2}{q}} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant \frac{c_{82}}{(1+t)^{\frac{3}{2}(q-2)\frac{1}{q}}} \\ &= \frac{c_{82}}{(1+t)^{\frac{3}{2}-\frac{3}{q}}} \quad .\end{aligned}$$

Lemma 17:

Unter den Voraussetzungen von Lemma 16 gilt für $\frac{8}{3} < \varrho \leqslant 3$:

$$\|u\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \begin{cases} \dfrac{c_{83}}{(1+t)^{\frac{3}{2}-\frac{3}{q}}} & \text{für } q \leqslant \dfrac{2}{3-\varrho} \\ \dfrac{c_{84}}{(1+t)^{\frac{3}{2}-\frac{3}{q}-\varepsilon}} & \text{für } q > \dfrac{2}{3-\varrho} \end{cases}$$

Dabei sei $\infty > q \geqslant 2$.

Beweis:

Es gilt nach [17] , Theorem 4:

$$\Big\| \int_0^t \sin(-\Delta+m^2)^{\frac{1}{2}}(t-s)(-\Delta+m^2)^{-\frac{1}{2}} G'(u) \, ds \Big\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^3)}$$
$$\leqslant c_{85} \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant 3} \int_0^t (t-\sigma+1)^{\frac{1}{q}-\frac{3}{2}} \Big\{ \|D^\alpha(-\Delta+m^2)^{-\frac{1}{2}} G'(u)\|_{L^2} + \|D^\alpha G'(u)\|_{L^1} \Big\} \, d\sigma$$

Nun gilt:

$$\|D^3G'(u)\|_{L^1}$$
$$\leqslant c_{86}\left\{\||Du|^3\|_{L^1} + \||u|^{\varrho-2}|Du||D^2u|\|_{L^1} + \||u|^{\varrho-1}|D^3u|\|_{L^1}\right\}$$
$$\leqslant c_{87}\left\{\|Du\|_\infty^{\varrho-2} + \|u\|_\infty^{\varrho-2} + \|u\|_\infty^{\varrho-2}\right\}$$
$$\leqslant c_{88}\left(\frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} + \frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{1}{2}(\varrho-2)}}\right)$$

Also ergibt sich:

$$\|D^3G'(u)\|_{L^1} \leqslant \begin{cases} c_{89}\,\dfrac{1}{(1+\sigma)^{\frac{1}{2}(\varrho-2)}} & \text{für } \frac{8}{3} < \varrho < 3 \\ c_{90}\,\dfrac{1}{(1+\sigma)^{\frac{1}{4}-\varepsilon}} & \text{für } \varrho = 3 \end{cases}$$

Da sich die anderen Terme einfacher behandeln lassen, erhalten wir auf diese Art einen Abfall für $\frac{8}{3} < \varrho < 3$:

$$\|\nabla u\|_{L^q} \leqslant \frac{c_{91}}{(1+t)^{\min(\frac{1}{2}-\frac{3}{q},\,\frac{1}{2}(\varrho-2))}} .$$

Falls also $q \leqslant \frac{2}{3-\varrho}$ gilt, so erhalten wir:

$$\|\nabla u\|_{L^q} \leqslant \frac{c_{91}}{(1+t)^{\frac{3}{2}-\frac{3}{q}}} .$$

Insbesondere gilt für $\varrho = 3$:

$$\|\nabla u\|_{L^q} \leqslant \frac{c_{92}}{(1+t)^{\frac{3}{2}-\frac{3}{q}}} \qquad \text{für } 2 \leqslant q < \infty .$$

Ferner läßt sich durch Interpolation wie in Lemma 16 leicht zeigen:

$$\|u\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \frac{c_{93}}{(1+t)^{\frac{3}{2}-\frac{3}{q}-\varepsilon}} \qquad \text{für beliebiges } \varepsilon > 0.$$

Aus allen diesen Lemmata ergibt sich schließlich das

Theorem 7:

Es gilt unter den Voraussetzungen $\mathcal{A}0$ an G:

1.) $\|u(t)\|_\infty \leq \frac{c_{94}}{(1+t)^{\frac{3}{4}}}$ für $\varrho > \frac{8}{3}$

2.) $\|\nabla u(t)\|_\infty \leq \begin{cases} \frac{c_{95}}{(1+t)^{\frac{3}{4}}} & \text{für } \varrho > 3 \\ \frac{c_{96}}{(1+t)^{\frac{3}{4}-\varepsilon}} & \text{für } \frac{8}{3} < \varrho \leq 3 \end{cases}$

falls $G(u) \in \tilde{C}^5(\mathbb{R})$.

3.) $\|\nabla u\|_{L^2} \leq$ const. für $\frac{8}{3} < \varrho$,

falls $G(u) \in \tilde{C}^3(\mathbb{R})$.

4.) $\|u\|_{L^p} \leq \frac{c_{97}}{(1+t)^{\frac{3}{4}-\frac{3}{p}}}$ für $2 \leq p < \infty$, $\frac{8}{3} < \varrho$

5.) $\|\nabla u\|_{L^p} \leq \begin{cases} \frac{c_{98}}{(1+t)^{\frac{3}{4}-\frac{3}{p}}} & \text{für } 3 \leq \varrho \\ \frac{c_{99}}{(1+t)^{\frac{3}{4}-\frac{3}{p}}} & \text{für } \frac{8}{3} < \varrho < 3,\ p \leq \frac{2}{3-\varrho} \\ \frac{c_{100}}{(1+t)^{\frac{3}{4}-\frac{3}{p}-\varepsilon}} & \text{für } \frac{8}{3} < \varrho < 3,\ p > \frac{2}{3-\varrho} \end{cases}$

falls $2 \leq p < \infty$ und $G \in \tilde{C}^5(\mathbb{R})$.

Bemerkung 1 zu Theorem 7:

Eine Fortsetzung des begonnenen Verfahrens, ausgehend von Lemma 15, liefert als nächstes:

$\|\nabla^4 u\|_{L^2} \leq c_{101}$, dann für $\varrho > 3$: $\|\nabla^2 u\|_\infty \leq \frac{c_{102}}{(1+t)^{\frac{3}{4}}}$,

dann für $\frac{8}{3} < \varrho \leq 3$: $\|\nabla^2 u\|_\infty \leq \frac{c_{103}}{(1+t)^{\frac{3}{4}-\varepsilon}}$, dann wieder

$$\|\nabla^3 u\|_\infty \leqslant \frac{c_{104}}{1+t} \quad .$$

Sukzessive erhält man so folgendes Resultat:
unter den Voraussetzungen $\mathcal{M}$ an G gilt:

$$1.)\|\nabla^n u(t)\|_\infty \leqslant \begin{cases} \dfrac{c_{105}}{(1+t)^{\frac{1}{2}}} & \text{für } \varrho > 3 \\ \dfrac{c_{106}}{(1+t)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} & \text{für } \frac{8}{3} < \varrho \leqslant 3 \ , \end{cases}$$

falls $G(u) \in C^{\tilde{n}+4}(\mathbb{R})$.

$$2.)\|\nabla^n u(t)\|_{L^2} \leqslant \text{ const.} \qquad \text{für } \frac{8}{3} < \varrho \ ,$$

falls $G(u) \in \tilde{C}^{n+2}(\mathbb{R})$.

$$3.)\|\nabla^n u(t)\|_{L^p} \leqslant \begin{cases} \dfrac{c_{107}}{(1+t)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}} & \text{für } 3 \leqslant \varrho \\ \dfrac{c_{108}}{(1+t)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}} & \text{für } \frac{8}{3} < \varrho < 3 \ , \ p \leqslant \frac{2}{3-\varrho} \\ \dfrac{c_{109}}{(1+t)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\varepsilon}} & \text{für } \frac{8}{3} < \varrho < 3 \ , \ p > \frac{2}{3-\varrho} \end{cases}$$

für $2 \leqslant p < \infty$ und $G(u) \in \tilde{C}^{n+4}(\mathbb{R})$.

Bemerkung 2 zu Theorem 7:
Wie sich leicht zeigen läßt durch Differentiation der Integralgleichung nach t, gelten ganz ähnliche Abschätzungen auch für $\|\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}\nabla^n u\|_\infty$ sowie $\|\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}\nabla^n u\|_{L^p}$,
nämlich genau obige Abschätzungen für $l = 0$ mit $n \geqslant 1$.

§ 6 Bemerkungen über die Anfangswerte

Im folgemden wird gezeigt, daß man sich in den Theoremen 1 bis 5 von der Kompaktheit der Anfangswerte befreien kann.

Theorem 8:

In den Theoremen 1 bis 5 kann die Voraussetzung
$\varphi \in C_0^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$
durch
$\varphi \in H^4(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in H^3(\mathbb{R}^3)$
ersetzt werden, falls $\varrho' \leqslant 3$ gilt und außer den jeweiligen Voraussetzungen obiger Theoreme noch

$$|G''(u)| \leqslant c_1 |u|^{\varrho'-1} \qquad \text{für } |u| \geqslant 1$$

erfüllt ist.

Beweis:

Sei also

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{H^4(\mathbb{R}^3)} \to 0 \quad , \quad \|\psi_n - \psi\|_{H^3(\mathbb{R}^3)} \to 0 \quad (n \to \infty) ,$$

wobei $\varphi_n \in C_0^4(\mathbb{R}^3)$, $\psi_n \in C_0^3(\mathbb{R}^3)$.

Seien weiter $u_n(x,t)$, $u(x,t)$ die zugehörigen klassischen Lösungen der nichtlinearen Wellengleichung, die nach [8] bzw. [15] existieren sowie $u_{n_0}(x,t)$, $u_0(x,t)$ die entsprechenden Lösungen der homogenen Gleichung. Wegen

$$\begin{aligned} E(u_n(t)) = E(u_n(0)) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla\varphi_n|^2 + |\psi_n|^2 + m^2 |\varphi_n|^2 + 2G(\varphi_n) \right) dx \\ &\leqslant c_2 \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla\varphi_n|^2 + |\psi_n|^2 + m^2 |\varphi_n|^2 + |\varphi_n|^6 + |\varphi_n|^2 \right) dx \\ &\leqslant c_3 \left(\|\varphi_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)} + \|\psi_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right) \leqslant c_4 \end{aligned}$$

und

$$\|u_{n_o}(t) - u_{m_o}(t)\|_{C^0(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq c_5 \|u_{n_o}(t) - u_{m_o}(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq c_6 \left(\|\varphi_n - \varphi_m\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \|\psi_n - \psi_m\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\right) \to 0 \quad (n,m \to \infty)$$

ist die Schranke der Lösungen $u_n(x,t)$ in den Theoremen 1 bis 4 unabhängig von n wählbar.

Ferner gilt:

$$\|u_n(t) - u(t)\|_{H^1}$$

$$\leq \|u_{n_o}(t) - u_o(t)\|_{H^1} + \int_o^t \|G'(u_n) - G'(u)\|_{L^2} \, d\tau$$

$$\leq \|u_{n_o}(t) - u_o(t)\|_{H^1} + c_7 \int_0^t \left\{ \left(\|u_n\|_{L^{3(\varrho'-1)}}^{\varrho'-1} + \|u\|_{L^{3(\varrho'-1)}}^{\varrho'-1} \right) \|u_n - u\|_{L^6} + \|u_n - u\|_{L^2} \right\} d\tau$$

$$\leq \|u_{n_o}(t) - u_o(t)\|_{H^1} + c_8 \int_o^t \|u_n(\tau) - u(\tau)\|_{H^1} \, d\tau \,,$$

woraus $\|u_n(t) - u(t)\|_{H^1} \to 0 \quad (n \to \infty)$ für jedes t gefolgert werden kann. Also gibt es eine Teilfolge von $\{u_n(x,t)\}$, die fast überall in x für jedes feste t gegen u(x,t) konvergiert, womit die Theoreme 1 bis 4 auch für nicht-kompakte Träger der Anfangswerte bewiesen sind.

Die Abschätzung von Lemma 3 ist unabhängig von der Größe des Trägers von φ_n und ψ_n. Bezüglich Lemma 4 bemerken wir, daß das dortige S_1 unabhängig von n gewählt werden kann. Sei nämlich $E_D[u_n(t)]$ die Energie von u_n zur Zeit t im Gebiet D des $\mathbb{R}^3$ und nehmen wir an, daß $k = k(\varepsilon,T)$ so gewählt werden kann, daß

$$E_{\{|x|>k\}}[u_n(0)] < \frac{\varepsilon}{4T} \quad \text{für} \quad n \geq N(\varepsilon,T) \qquad (*)$$

gilt, so folgt durch Integration der Energieidentität der Differentialgleichung über

$\{(y,\tau) : |x-y| < \tau + k , 0 < \tau < t\}$:

$E_{\{|x|>t+k\}}[u_n(t)] < \frac{\varepsilon}{4T}$.

und damit

$$\int_I \int_{|x|>t+k} G(u_n)\, dx\, dt < \varepsilon ,$$

so daß Lemma 4 mit unverändertem S_1 gültig bleibt, wenn man ε durch 2ε ersetzt.

Um (*) zu zeigen, bemerken wir, daß

$$|E_D[u_n(0)] - E_D[u(0)]|$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_D \Big(\big| |\nabla u_n(x,0)|^2 - |\nabla u(x,0|^2 \big| + |u_{n_t}(x,0)^2 - u_t(x,0)^2| + m^2 |u_n(x,0)^2 - u(x,0)^2| + 2|G(u_n(x,0)) - G(u(x,0))| \Big) dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \Big\{ (|\nabla\varphi_n| + |\nabla\varphi|)\,|\nabla(\varphi_n - \varphi)| + (|\psi_n| + |\psi|)\,|\psi_n - \psi| + m^2 (|\varphi_n| + |\varphi|)\,|\varphi_n - \varphi| + 2|G'(\tilde{\varphi}_n)|\,|\varphi_n - \varphi| \Big\}\, dx$$

mit $|\tilde{\varphi}_n(x) - \varphi(x)| \leq |\varphi_n(x) - \varphi(x)|$.

Wegen

$$\int_{\mathbb{R}^3} |G'(\tilde{\varphi}_n)|\,|\varphi_n - \varphi|\, dx$$

$$\leq c_9 \int_{\mathbb{R}^3} (|\varphi_n| + |\varphi| + |\varphi_n|^{\beta'} + |\varphi|^{\beta'})\,|\varphi_n - \varphi|\, dx$$

$$\leq c_{10} \left(\|\varphi_n\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2} + \|\varphi_n\|^{\beta'}_{L^{2\beta'}} + \|\varphi\|^{\beta'}_{L^{2\beta'}}\right) \|\varphi_n - \varphi\|_{L^2}$$

gilt dann:

$|E_D[u_n(0)] - E_D[u(0)]| \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Also existiert ein $N(\varepsilon,T)$ so, daß

$$\sup_{n \geq N} |E_D[u_n(0)] - E_D[u_N(0)]| \leq \frac{\varepsilon}{8T}$$

erfüllt ist.

Ferner kann man ein $k(\varepsilon,T)$ so wählen, daß

$$E_{\{|x|>k\}}[u_N(0)] < \frac{\varepsilon}{8T}$$

wird und damit

$$E_{\{|x|>k\}}[u_n(0)] < \frac{\varepsilon}{4T} \quad \text{für} \quad n \geq N(\varepsilon,T) ,$$

womit (*) erfüllt ist.

Lemma 5 gilt unverändert mit einer von n unabhängigen Konstanten c_5, und in Lemma 6 kann S_2 unabhängig von n gewählt werden, da wegen $u_{n_o}(t) \to u_o(t)$ in $C^o(\mathbb{R}^3)$ gleichmäßig in t:

$|u_{n_o}(x,t)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ für alle $t \geq S$

unabhängig von n gilt $(n \geq n_o)$.

Also kann man wegen der bisher gezeigten gleichmäßigen Abschätzungen zu jedem n ein t_n^* so wählen, daß $|u_n(x,t)| < \varepsilon$ in $[t_n^*-T, t_n^*]$ und $t_n^* \leq \bar{t}^*$ gilt. In Theorem 5 wird dann gezeigt, daß $|u_n| < \varepsilon$ für $t \geq \bar{t}^*(\varepsilon)$, $n \geq N^*(\varepsilon)$, nämlich für alle $t \geq t_n^*-T$,

d.h. $\sup_{n \geq N^*(\varepsilon)} \sup_{x} |u_n(x,t)| < \varepsilon$ für $t \geq \bar{t}^*(\varepsilon)$.

Da, wie oben gezeigt, für eine Teilfolge $u_n(x,t) \to u(x,t)$ fast überall in x für jedes feste t gilt, folgt auch:

$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \varepsilon$ für $t \geq \bar{t}^*(\varepsilon)$,

womit das Theorem bewiesen ist.

Literatur

[1] Browder, F.E.
On non-linear wave equations
Math.Z. 80, 249-264 (1962/63)

[2] Chadam, John M.
Asymptotics for $\Box u = m^2 u + G(x,t,u,u_x,u_t)$
I. Global existence and decay
Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa ser.3, 26, 33-65(1972)

[3] Chadam, John M.
Asymptotics for $\Box u = m^2 u + G(x,t,u,u_x,u_t)$
II. Scattering theory
Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa ser.3, 26, 67-95(1972)

[4] Courant, Richard - Hilbert, David
Methoden der mathematischen Physik I
Springer 1968

[5] Courant, Richard - Hilbert, David
Methoden der mathematischen Physik II
Springer 1968

[6] Hadamard, Jacques
Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations
New Haven/London 1923

[7] Hörmander, Lars
Linear partial differential operators
Springer 1963

[8] Jörgens, Konrad
Das Anfangswertproblem im Großen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen
Math.Z. 77, 295-308 (1961)

[9] Morawetz, Cathleen S.
Time decay for the nonlinear Klein-Gordon equation
Proc. Roy. Soc. London A 306, 291-296 (1968)

[10] Morawetz, Cathleen S. - Strauss, Walter A.
Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation
Comm. pure and appl. mathematics XXV, 1-31 (1972)

[11] Sather, J.
The existence of a global classical solution of the initial-boundary value problem for $\Box u+u^3 = f$.
Arch. Rat. Mech. Analysis 22, 292-307 (1966)

[12] Segal, I.E.
Nonlinear semi-groups
Ann. of Math. 78, 339-364 (1963)

[13] Segal, I.E.
Dispersion for non-linear relativistic equations II.
Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^{e} s., t.1, 459-497 (1968)

[14] Strauss, Walter A.
Decay and asymptotics for $\Box u = F(u)$
J. functional analysis 2, 409-457 (1968)

[15] Wahl, Wolf von
Klassische Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen im Großen
Math.Z. 112, 241-279 (1969)

[16] Wahl, Wolf von
Über die klassische Lösbarkeit des Cauchy-Problems für nichtlineare Wellengleichungen bei kleinen Anfangswerten und das asymptotische Verhalten der Lösungen
Math.Z. 114, 281-299 (1970)

[17] Wahl, Wolf von
L^p-decay rates for homogeneous wave-equations
Math.Z. 120, 93-106 (1971)

[18] Wahl, Wolf von
Some decay-estimates for nonlinear wave equations
J. functional analysis 9, 490-495 (1972)

Lebenslauf

Am 19.März 1949 wurde ich als Sohn des selbständigen Kaufmanns August Pecher und seiner Ehefrau Lieschen, geb. Niemeyer, in Herford (Westfalen) geboren. Dort besuchte ich von Ostern 1955 bis Ostern 1959 die Bürgerschule und anschließend den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig des Ravensberger Gymnasiums, wo ich im Juli 1967 die Reifeprüfung ablegte. Im Wintersemester 1967/1968 begann ich mein Studium der Mathematik an der Georg-August-Universität zu Göttingen, an der ich im Oktober 1969 die Diplomvorprüfung und im Oktober 1971 die Diplomhauptprüfung bestand. Seit etwa 1970 beschäftige ich mich unter der Anleitung von Prof. Heinz und Prof. von Wahl mit partiellen Differentialgleichungen.